

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Ancien Examinateur d'admission
à l'École Polytechnique.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI,
DUPORCQ ET BOURLET.

QUATRIÈME SÉRIE.
TOME XVII.
(LXXVIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET CIE, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1917

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[L^1 17 e]

LA COURBE ORTHOPTIQUE DE DEUX CONIQUES;

Par M. PICARDAT,
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Nancy.

I. — Étude générale.

1. Degré. — Soient deux coniques S et S′ sans particularité de forme ni de position; soit C la courbe orthoptique; pour avoir son degré, cherchons le nombre de points d'intersection avec une droite quelconque Δ du plan; menons une tangente T à S qui coupe Δ en t et par t la perpendiculaire T_1 à T; le point A appartiendra à l'orthoptique c si T_1 est tangente à S′. Or si T varie en restant tangente à S, T_1 varie et enveloppe une courbe (E) et les tangentes communes à E et S′ couperont Δ aux points cherchés; leur nombre sera donc le double de la classe de E. Pour avoir la classe de E cherchons le nombre de droites T_1 passant par un point quelconque du plan a; les droites T_1 passant par a seront obtenues en joignant ce point aux points d'intersection de Δ avec la podaire de S prise par rapport à a; le nombre de ces

points est 4 et par suite l'*orthoptique* C *est de degré* 8.

Remarque. — La courbe C est tangente à S en huit points, car la développée de S et S′ ont huit tangentes communes. De même pour S′.

2. Points cycliques I et J. — Si l'on mène de I une tangente à S et une tangente à S′, ces deux droites isotropes sont rectangulaires, donc I fait partie du lieu C; de plus les deux tangentes à S issues de I peuvent se combiner aux deux tangentes à S′ issues de I de quatre façons; donc *les points cycliques* I *et* J *sont points quadruples de* C.

Foyers singuliers. — Soit M un point de la courbe C intersection de la droite T, tangente à S en θ, et de la perpendiculaire T′ tangente à S′ en θ'; la normale à la courbe C au point M passe au milieu de $\theta\theta'$ (théorie du centre instantané, par exemple). Soient F, φ les foyers réels de S; F′, φ' ceux de S′. Les deux tangentes FI et F′I fournissent le point I de C et la tangente à C correspondante coïncide avec la normale et est équidistante de FI et F′I; elle passe donc par le milieu f_1 de FF′; donc :

La courbe C *possède quatre foyers singuliers réels* f_1, f_2, f_3, f_4 *qui sont les milieux des segments obtenus en joignant les foyers de* S *à ceux de* S′.

Ces quatre points sont donc les sommets d'un parallélogramme ayant pour côtés c et c'; ces côtés étant parallèles aux axes focaux des deux coniques (c et c' désignant les demi-distances focales).

Remarquons de suite que deux foyers singuliers peuvent se confondre :

1° Deux sommets adjacents f_1, f_2 du parallélogramme sont confondus; les deux autres f_3, f_4 sont alors confondus; l'une des coniques est un cercle; en prenant pour Δ une droite isotrope, on trouve pour E une conique et l'on voit que, en I et en J, la courbe C possède un double rebroussement (points bicuspidaux à tangentes distinctes).

2° Deux sommets opposés f_1, f_3, par exemple, se confondent; alors les axes focaux des deux coniques sont parallèles et les distances focales égales. Ici la courbe possède en I et en J un contact avec elle-même (tacnode et deux autres branches en chaque point).

3° Les deux cas précédents peuvent être réunis; on a deux cercles pour S et S′; ce cas sera examiné plus loin.

3. Points doubles. — Un point M du plan sera point double de C si les deux tangentes à S issues de M sont perpendiculaires aux deux tangentes à S′ issues du même point, car on a en M en général deux tangentes distinctes pour la courbe C.

L'angle des tangentes à S issues de M a alors même bissectrice que l'angle des tangentes à S′ issues de M; les tangentes issues de M aux coniques du faisceau tangentiel [S, S′] forment donc une involution de rayons doubles rectangulaires; les droites isotropes issues de M forment alors un couple de l'involution et M est le foyer d'une conique du faisceau [S, S′]; réciproquement tout point de C foyer d'une conique du faisceau [S, S′] est point double de C. Or le lieu des foyers des coniques d'un faisceau tangentiel est une cubique circulaire Γ; elle coupe C en 24 points dont 8 aux points I et J; il en reste 16 à distance finie; or chacun est compté deux fois, donc on a 8 points.

La courbe (C) possède en général huit points doubles à distance finie situés sur une cubique circulaire (contenant son foyer singulier) passant par les foyers et les ombilics de S *et* S′.

Ces résultats montrent donc que la courbe C est en général de genre égal à 1.

Nous allons examiner maintenant les cas où le genre et le degré de C peuvent diminuer selon la nature et la position de S et S′.

4. Apparition d'un neuvième et d'un dixième point double. — La courbe C peut-elle posséder plus de huit points doubles et devenir unicursale? La réponse nous sera fournie de la manière suivante : tout point double M de C relatif aux deux tangentes issues de M à S et S′ est fourni par la courbe Γ; un nouveau point double doit résulter d'une seule tangente à S perpendiculaire à une seule tangente à S′; ceci ne peut se produire que si ces deux tangentes sont des asymptotes; supposons donc une asymptote A de S perpendiculaire à une asymptote A′ de S′; ces deux droites se coupent en a et l'on voit facilement que la courbe C possède quatre points infiniment voisins de a relatifs à deux branches de courbes issues de a; donc :

Si une asymptote de S *est perpendiculaire à une asymptote de* S′, *l'intersection de ces deux droites est un point double de* C *qui devient unicursale.*

Au point de vue de coniques réelles ce cas ne peut se présenter que pour deux hyperboles.

On conclut de suite que : *si les asymptotes de* S *sont perpendiculaires aux asymptotes de* S′, *la courbe* C *possède deux nouveaux points doubles et se décompose.*

La condition de perpendicularité des asymptotes s'exprime encore par le fait que les deux coniques sont semblables, les axes correspondants étant rectangulaires. Ce cas se traite immédiatement : les deux coniques S et S′ possèdent alors deux centres de similitude σ et σ'; soit T une tangente à S; il lui correspond une perpendiculaire T′ tangente à S′, relativement au centre σ et le point d'intersection de T et T′ décrit la podaire d'une conique semblable à S et S′ par rapport à σ, donc :

Si les deux coniques S *et* S′ *sont semblables, les axes correspondants étant rectangulaires, l'orthoptique* C *se décompose en deux podaires de coniques semblables à* S *et* S′ *et de points doubles* σ *et* σ' *centres de similitude.*

Remarquons que le cas de deux cercles rentre dans celui-ci.

5. Abaissement du degré de C. — Ce fait peut être dû aux deux causes suivantes :

1° Une droite perpendiculaire à elle-même est tangente à S et S′; alors elle fait partie de C; au point de vue réel, c'est le cas de deux coniques ayant un foyer commun ;

2° Une tangente à S′ est perpendiculaire à toutes les tangentes de S; c'est-à-dire S′ est une parabole et la tangente singulière, c'est-à-dire la droite de l'infini, compte double pour C.

6. Étude de la cubique circulaire Γ. — Je signalerai simplement les résultats classiques relatifs à Γ pour la disposition des points doubles de C.

1° Le quadrilatère des tangentes communes à S et S′ est circonscrit à un cercle : *la cubique* Γ *a un point double au centre du cercle.*

2° Le quadrilatère des tangentes communes est circonscrit à deux cercles; dans ce cas S et S′ ont un axe commun, Γ a deux points doubles, c'est-à-dire : *la cubique* Γ *se décompose en cet axe et un cercle l'admettant comme diamètre.*

3° Le quadrilatère des tangentes communes renferme une droite isotrope et par suite, à cause de la réalité, S et S′ ont un foyer commun ; *la cubique* Γ *se réduit à une droite à distance finie* (+ deux droites isotropes).

4° Le quadrilatère des tangentes communes est un parallélogramme ; S et S′ sont concentriques : *la cubique* Γ *se réduit à une hyperbole équilatère* (+ la droite de l'infini).

5° Le quadrilatère des tangentes communes est un losange, S et S′ sont coaxiales : *la cubique* Γ *se réduit à deux droites perpendiculaires* (+ la droite de l'infini).

6° Le quadrilatère des tangentes communes renferme la droite de l'infini; S et S′ sont deux paraboles : *la cubique* Γ *se réduit à un cercle* (+ la droite de l'infini).

7° Le quadrilatère des tangentes communes renferme la droite de l'infini comptée deux fois; S et S′ sont deux paraboles à axes parallèles : *la cubique* Γ *se réduit à une droite* (+ la droite de l'infini double).

Enfin signalons le cas des coniques homofocales où Γ n'existe plus.

II. — Étude des divers cas particuliers.

Cette étude résulte des résultats précédents relatifs à C :

1° Si une asymptote de S est perpendiculaire à une asymptote de S′, C est unicursale.

2° Si les asymptotes de S sont perpendiculaires à celles de S′, C se décompose en deux podaires.

3° Si les deux coniques ont un foyer commun, C renferme les deux droites isotropes issues de ce foyer et le degré de la courbe restante est celui de C — 2.

4° Si une conique est une parabole, C renferme la droite de l'infini comptée double et le degré de la courbe restante est celui de C — 2.

5° Les huit points doubles de C sont sur Γ qui peut se décomposer et si $F\varphi$ et $F'\varphi'$ sont égaux et parallèles deux points doubles sont à l'infini en I et J (tacnodes).

La combinaison de ces résultats et des résultats relatifs à Γ donne les conclusions suivantes :

Première partie. — *S et S′ sont deux coniques à centre :*

α. *Courbe C de degré 8 de genre 1 : 1° S et S′ sont placées de façon quelconque.* — C est du 8ᵉ degré, de genre 1; quarticirculaire; ayant huit points doubles à distance finie sur la cubique Γ.

2° *$F\varphi$, $F'\varphi'$ sont deux segments égaux et parallèles.* — C n'a plus que six points doubles à distance finie, les deux autres sont à l'infini en I et J.

3° *L'une des coniques est un cercle.* — Les points cycliques sont bicuspidaux.

4° *Les deux coniques S et S′ ont un axe commun.*

— Cet axe est axe de symétrie pour C qui possède quatre points doubles sur cet axe et quatre autres points doubles deux à deux symétriques par rapport à cet axe situés sur un cercle qui contient les foyers et les ombilics de S et S′ situés hors de l'axe commun. Ces quatre points doubles peuvent se construire géométriquement; d'ailleurs deux seront rejetés à l'infini si S et S′ ont même distance focale.

5° *Les deux coniques* S *et* S′ *sont concentriques.* — Le centre commun est centre de symétrie pour C qui possède huit points doubles à distance finie situés sur une hyperbole équilatère, symétriques deux à deux par rapport au centre; si de plus S et S′ sont égales, la courbe C a deux axes de symétrie rectangulaires, les points doubles se déterminent géométriquement.

6° *Les deux coniques* S *et* S′ *sont coaxiales.* — Les axes sont axes de symétrie pour C; chaque axe contient quatre points doubles que l'on peut déterminer.

β. *Courbe* C *de degré* 8 *unicursale.* — Ce cas ne peut se présenter que pour deux hyperboles telles qu'une asymptote de l'une soit perpendiculaire à une asymptote de l'autre; on peut signaler le cas où ces deux hyperboles sont concentriques, la courbe C ayant alors un centre de symétrie.

γ. *Courbe* C *de degré* 8 *décomposable en deux podaires.* — Ce cas se présente lorsque les asymptotes de S sont perpendiculaires à celles de S′ ou encore que S et S′ sont semblables, les axes de même nature étant rectangulaires; les deux centres de similitude σ et σ' sont sur le cercle de diamètre $\omega\omega'$; ω, ω' étant les centres des deux coniques S et S′; ce cercle passe aussi par les deux nouveaux points doubles, intersections

des asymptotes rectangulaires. Les deux coniques Σ, Σ' dont on prend les podaires sont semblables à S et S', deux des centres de similitude étant σ et σ'. Selon les positions de σ, σ' on a diverses courbes.

Je signalerai les cas suivants :

1° Les deux coniques S et S' sont concentriques; on a deux podaires de coniques prises par rapport au centre, en particulier l'*orthoptique de deux hyperboles équilatères ayant les mêmes asymptotes et formée de deux lemniscates.*

2° S *et* S' *sont deux cercles; l'orthoptique est formée de deux limaçons de Pascal égaux*, symétriques par rapport à la ligne des centres; on voit que les points cycliques sont de rebroussement; les foyers singuliers sont confondus au milieu de $\omega\omega'$; enfin les points doubles des deux limaçons sont sur le cercle de diamètre $\omega\omega'$ et le cercle ayant pour diamètre le segment formé par les deux centres d'homothétie.

Remarquons que, si les deux coniques données S et S' sont orthogonales en un de leurs points communs, ce point est de rebroussement pour C, donc :

L'orthoptique de deux cercles orthogonaux est formée de deux cardioïdes ayant leurs rebroussements aux points d'intersection des deux cercles.

6. *Courbe* C *de degré* 6 *et de genre* 1. — Supposons que S et S' aient un foyer commun F, F'; C renferme les deux droites isotropes FI, FJ et il reste une courbe du sixième degré tricirculaire admettant pour foyers singuliers les deux centres ω et ω' et le milieu de $\varphi_1\varphi_1'$. La cubique Γ se réduit à la droite $\varphi_1\varphi_1'$ qui coupe C en trois points doubles, la courbe C est de genre 1 en général. La courbe C touche chacune des

coniques S et S′ en six points; examinons un cas particulier :

Les deux coniques S *et* S′ *ont un axe commun.* — C'est un axe de symétrie pour C; les trois points doubles de C sont sur cet axe; si l'une des coniques est un cercle, il y a rebroussement aux points cycliques.

ε. *Courbe* C *de degré* 6 *unicursale.* — C'est le cas de deux hyperboles S et S′ ayant un foyer commun, une asymptote de la première étant perpendiculaire à une de la deuxième.

φ. *Courbe* C *de degré* 6 *décomposable.* — Les deux coniques S et S′ ont un foyer commun, leurs axes focaux perpendiculaires et sont semblables; la courbe C se réduit à une podaire du quatrième degré et à un cercle, coupant la podaire sur la droite des foyers. Enfin S et S′ sont homofocales; C se réduit au quatrième degré bicirculaire avec quatre rebroussements aux points communs à S et S′, on a un cercle double concentrique. Si $S \equiv S'$ on retrouve le cercle de Monge.

Deuxième partie. — S *est une conique à centre,* S′ *est une parabole.* — L'orthoptique se réduit à une courbe du sixième degré, la droite de l'infini comptant double; les points cycliques sont doubles et il y a encore huit points doubles, donc en tout dix, la courbe est donc unicursale; ces huit points doubles sont obtenus de la manière suivante : sept sont sur la cubique circulaire Γ, le huitième est le point à l'infini dans la direction de la directrice de la parabole. La courbe possède deux foyers singuliers réels, milieux des segments joignant le foyer de la parabole aux deux foyers

de la conique S. La courbe C touche chacune des deux coniques en six points. Signalons les cas suivants :

1° *Les deux coniques ont un axe commun.* — Ce sera un axe de symétrie pour C; Γ se réduit à cet axe et un cercle, donc la courbe C a trois points doubles sur l'axe et quatre sur le cercle qui passe par les foyers et les ombilics non situés sur l'axe.

2° *Les deux coniques ont un foyer commun.* — L'orthoptique se réduit à une courbe du quatrième degré circulaire ayant pour foyer singulier le centre de la conique S; Γ se réduit à une droite qui coupe C en deux points doubles; le troisième point double est à l'infini; les points doubles et les asymptotes pouvant se construire géométriquement.

Troisième partie. — S *et* S′ *sont deux paraboles.* — La droite de l'infini comptant quadruple, il reste une courbe C du quatrième degré circulaire ayant pour foyer singulier le milieu du segment joignant les foyers des deux paraboles; Γ se réduit à un cercle coupant C en huit points; en exceptant les points cycliques on trouve trois points doubles; donc :

L'orthoptique de deux paraboles est une quartique circulaire ayant trois points doubles situés sur un cercle passant par les foyers des deux paraboles et circonscrit au triangle des tangentes communes.

Examinons les divers cas : d'abord les axes peuvent être rectangulaires, alors la courbe C se réduit à une podaire de parabole courbe du troisième degré par rapport au centre de similitude, donc :

1° *L'orthoptique de deux paraboles ayant leurs axes rectangulaires est une podaire de parabole;*

2° *L'orthoptique de deux paraboles telles que l'axe de chacune d'elles soit la directrice de l'autre est une strophoïde droite;*

3° *L'orthoptique de deux paraboles telles que l'axe de chacune d'elles soit la tangente au sommet de l'autre est une cissoïde droite.*

Si les deux paraboles ont leur foyer commun, C se réduit au second degré, en général, et l'on a :

1° *L'orthoptique de deux paraboles ayant leur foyer commun est une conique;*

2° *L'orthoptique de deux paraboles ayant leur foyer commun et leurs axes rectangulaires est une droite perpendiculaire au milieu du segment joignant le foyer commun à l'intersection des deux directrices.*

Si les deux paraboles ont leurs axes parallèles, C est une quartique circulaire ayant un point double à l'infini sur la direction perpendiculaire à celle des axes et deux points doubles à distance finie sur la droite joignant les deux foyers.

Si de plus les deux paraboles ont même foyer, la courbe C se réduit à une conique ayant trois points doubles (un à l'infini et deux aux intersections des deux paraboles), c'est une droite double, donc :

L'orthoptique de deux paraboles homofocales est la corde commune. Si les deux paraboles sont identiques, on retrouve la directrice.

Le cas où l'une des coniques se réduit à deux droites ou, au point de vue tangentiel, à un ou deux points fournit pour C des podaires. Si S et S' sont réduites toutes deux à des points on a pour C quatre cercles.

La question peut se généraliser en faisant jouer à deux points quelconques le rôle des points cycliques ou en les remplaçant par une conique quelconque; on a alors le résultat suivant :

Étant données trois coniques S, S′, S″ *le lieu* C *des points d'intersection des tangentes à* S *et* S′ *conjuguées par rapport à* S″ *est une courbe du huitième degré possédant huit points doubles sur* S″ *et douze points doubles sur une cubique* Γ.

Les huit points sur S″ sont les points de contact des tangentes communes à S et S″, puis à S′ et S″.

La cubique Γ est le lieu des points tels que les tangentes issues de ces points à S, S′, S″ soient en involution. Cette cubique Γ passe par les dix-huit ombilics des trois coniques prises deux à deux.

La courbe C touche chacune des deux coniques S et S′ en huit points. Ces propriétés se démontrent comme pour le cas de l'orthoptique de deux coniques.

Remarquons qu'en échangeant les trois coniques S, S′, S″, on définit trois courbes du huitième degré C, C′, C″, et l'on à toujours la même cubique Γ; donc la cubique Γ renferme les dix-huit ombilics des coniques et les trente-six points doubles de C, C′, C″ situés hors des coniques données.

Il resterait à étudier comme plus haut les divers cas possibles pour la courbe du huitième degré obtenue et à en déduire quelques théorèmes intéressants.

[K¹18g]

SUR LES SEIZE SPHÈRES TANGENTES A UNE SPHÈRE ET A TROIS PLANS DONNÉS;

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

M. Barisien a proposé dans *Mathesis* (1913, p. 88) sous le n° 1913, la question suivante :

On considère un cercle O *et deux cordes rectangulaires* APB *et* CPD; *il existe huit cercles qui sont tangents à la fois à ces cordes et au cercle* O. *Montrer que si les cordes se déplacent autour du point* P : 1° *le produit du rayon d'un cercle qui touche le cercle* O *extérieurement, par le rayon du cercle qui touche le cercle* O *intérieurement dans l'angle des cordes* AB, CD *opposé à celui où se trouve le premier cercle est constant;* 2° *la somme des rayons des quatre cercles extérieurs au cercle* O *diminuée de la somme des rayons des quatre cercles intérieurs est constante.*

Dans la question 4603 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (1916, p. 2) M. Barisien reprend la seconde propriété et propose de rechercher ce qu'elle devient quand les cordes données font un angle θ.

Nous nous proposons d'étudier ici la question analogue pour l'espace et de rechercher, entre les rayons des seize sphères tangentes à une sphère donnée et à trois plans sécants formant un trièdre *quelconque*, des relations du même genre que celles rappelées plus

haut. Nous traiterons d'abord rapidement le cas de la figure plane en supposant que les cordes données fassent un angle θ, et nous mettrons les résultats sous une forme qui présentera avec ceux relatifs à l'espace une analogie complète.

1. Supposons que le centre O du cercle donné se trouve dans l'angle BPD des cordes AB, CD; soient r le rayon du cercle O, θ l'angle APC, ϖ la puissance de P par rapport au cercle O, δ_1, δ_2 et d les distances de O aux cordes AB, CD et au point P. Désignons par ρ_1 et ρ_2 les rayons des cercles extérieurs tangents aux arcs BD et AC, par ρ'_1 et ρ'_2 les rayons des cercles intérieurs tangents aux arcs AC et BD; les centres correspondants seront désignés par ω_1, ω_2, ω'_1, ω'_2. Si l'on considère les projections de $O\omega_1$ sur chacune des cordes données faites parallèlement à l'autre corde, on trouve

$$(1)\quad (\rho_1 + r)^2 \sin^2\theta = (\rho_1 - \delta_1)^2 + (\rho_1 - \delta_2)^2 + 2(\rho_1 - \delta_1)(\rho_1 - \delta_2)\cos\theta.$$

Si l'on opère de même pour le cercle ω'_1, on obtient

$$(-\rho'_1 + r)^2 \sin^2\theta = (-\rho'_1 - \delta_1)^2 + (-\rho'_1 - \delta_2)^2 + 2(-\rho'_1 - \delta_1)(-\rho'_1 - \delta_2)\cos\theta.$$

Par suite, l'équation (1), du second degré en ρ_1, a pour racines ρ_1 et $-\rho'_1$. On forme de la même manière l'équation

$$(2)\quad (\rho_2 + r)^2 \sin^2\theta = (\rho_2 + \delta_1)^2 + (\rho_2 + \delta_2)^2 + 2(\rho_2 + \delta_1)(\rho_2 + \delta_2)\cos\theta,$$

qui a pour racines ρ_2 et $-\rho'_2$. On déduit aisément

de (1)

$$\rho_1 - \rho'_1 = \frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\left(2r\cos^2\frac{\theta}{2} + \delta_1 + \delta_2\right),$$

$$\rho_1\rho'_1 = (r^2 - d^2)\tang^2\frac{\theta}{2} = \varpi\tang^2\frac{\theta}{2}.$$

De (2) on tire de même

$$\rho_2 - \rho'_2 = \frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\left(2r\cos^2\frac{\theta}{2} - \delta_1 - \delta_2\right),$$

$$\rho_2\rho'_2 = \varpi\tang^2\frac{\theta}{2} = \rho_1\rho'_1,$$

et l'on a, par conséquent,

$$(3) \qquad \rho_1 + \rho_2 - \rho'_1 - \rho'_2 = 4r\tang^2\frac{\theta}{2},$$

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{\rho'_2} - \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} = \frac{4r}{\varpi}.$$

On a donc ces propriétés :

Pour un angle θ *donné, la somme des rayons des cercles extérieurs situés dans deux angles opposés formés par les cordes* AB, CD *diminuée de celle des rayons des cercles intérieurs situés dans les mêmes angles est constante.*

Quand les cordes AB, CD *faisant un angle constant* θ *se déplacent autour du point fixe* P, *le produit du rayon d'un cercle qui touche le cercle* O *extérieurement par le rayon du cercle qui touche le cercle* O *intérieurement dans l'angle des cordes* AB, CD *opposé à celui où se trouve le premier cercle est constant.*

Si deux cordes AB, CD *quelconques sont mobiles autour du point* P, *la somme des inverses des rayons des cercles intérieurs situés dans deux angles opposés formés par ces cordes diminuée de celle des*

inverses des rayons des cercles extérieurs situés dans les mêmes angles est constante et égale au double du rapport du diamètre du cercle O *à la puissance* ϖ *du point* P *par rapport à ce cercle.*

Des propriétés analogues existent pour les cercles situés dans les autres angles opposés formés par les cordes AB et CD. Si l'on désigne donc par $\Sigma\rho$ et $\Sigma\rho'$ la somme des rayons des cercles extérieurs et celle des rayons des cercles intérieurs et par $\frac{1}{\rho}$ et $\Sigma\frac{1}{\rho'}$ la somme des inverses des rayons des cercles extérieurs et celle des inverses des rayons des cercles intérieurs, on a, d'après les relations (3) et (4),

$$\Sigma\rho - \Sigma\rho' = 4r\left(\operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2} + \cot^2\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\sum\frac{1}{\rho'} - \sum\frac{1}{\rho} = \frac{8r}{\varpi}.$$

En particulier, si $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\Sigma\rho - \Sigma\rho' = 8r.$$

Remarquons enfin que, si λ désigne la diagonale issue de P dans le losange construit sur les côtés de l'angle θ et dont les hauteurs égalent l'unité, on a

$$(5)\qquad \rho_1 + \rho_2 - \rho'_1 - \rho'_2 = \frac{4r}{\lambda^2 - 1},$$

$$(6)\qquad \rho_1\rho'_1 = \rho_2\rho'_2 = \frac{\varpi}{\lambda^2 - 1}.$$

2. Soient maintenant une sphère S de centre O et trois plans sécants π_1, π_2, π_3 se coupant suivant des droites d_1, d_2, d_3; et considérons les seize sphères ω tangentes à la fois à S et aux plans π_1, π_2, π_3. Soient δ_1, δ_2, δ_3 les distances de O aux plans π_1, π_2, π_3; θ_1, θ_2, θ_3 les angles du trièdre Θ formé par les plans π et qui

renferme le centre O; α_1, α_2, α_3 les angles des droites d_1, d_2, d_3 respectivement avec les plans π_1, π_2, π_3. Désignons encore par ρ_1 et ρ'_2 les rayons des sphères ω extérieure et intérieure à la sphère S et situées dans le trièdre Θ, par ρ_2 et ρ'_1 les rayons des sphères ω extérieure et intérieure à S et situées dans le trièdre opposé à Θ; les centres correspondants seront désignés par ω_1, ω'_2, ω_2, ω'_1.

Menons par O des droites d'_1, d'_2, d'_3 parallèles à d_1, d_2, d_3 et par ω_1 des plans parallèles à π_1, π_2, π_3 coupant les droites d'_1, d'_2, d'_3 en t_1, t_2, t_3. On a alors

$$O\,t_1 = \frac{\rho_1 - \delta_1}{\sin\alpha_1}, \qquad O\,t_2 = \frac{\rho_1 - \delta_2}{\sin\alpha_2}, \qquad O\,t_3 = \frac{\rho_1 - \delta_3}{\sin\alpha_3}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}(\rho_1 + r)^2 = {} & \frac{(\rho_1 - \delta_1)^2}{\sin^2\alpha_1} + \frac{(\rho_1 - \delta_2)^2}{\sin^2\alpha_2} + \frac{(\rho_1 - \delta_3)^2}{\sin^2\alpha_3} \\ & + \frac{2(\rho_1 - \delta_2)(\rho_1 - \delta_3)\cos\theta_1}{\sin\alpha_2 \sin\alpha_3} \\ & + \frac{2(\rho_1 - \delta_2)(\rho_1 - \delta_1)\cos\theta_2}{\sin\alpha_3 \sin\alpha_1} \\ & + \frac{2(\rho_1 - \delta_1)(\rho_1 - \delta_2)\cos\theta_3}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}.\end{aligned}$$

Cette relation s'écrit en développant

$$\begin{aligned}(7)\quad & \rho_1^2\left[\frac{1}{\sin^2\alpha_1} + \frac{1}{\sin^2\alpha_2} + \frac{1}{\sin^2\alpha_3}\right. \\ & \qquad \left. + \frac{2\cos\theta_1}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3} + \frac{2\cos\theta_2}{\sin\alpha_3\sin\alpha_1} + \frac{2\cos\theta_3}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2} - 1\right] \\ & - 2\rho_1\left[\frac{\delta_1}{\sin^2\alpha_1} + \frac{\delta_2}{\sin^2\alpha_2} + \frac{\delta_3}{\sin^2\alpha_3} + \frac{(\delta_2 + \delta_3)\cos\theta_1}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3}\right. \\ & \qquad \left. + \frac{(\delta_3 + \delta_1)\cos\theta_2}{\sin\alpha_3\sin\alpha_1} + \frac{(\delta_1 + \delta_2)\cos\theta_3}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2} + r\right] \\ & + \frac{\delta_1^2}{\sin^2\alpha_1} + \frac{\delta_2^2}{\sin^2\alpha_2} + \frac{\delta_3^2}{\sin^2\alpha_3} + \frac{2\,\delta_2\,\delta_3\cos\theta_1}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3} \\ & \qquad + \frac{2\,\delta_3\,\delta_1\cos\theta_2}{\sin\alpha_3\sin\alpha_1} + \frac{2\,\delta_1\,\delta_2\cos\theta_3}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2} - r^2 = 0.\end{aligned}$$

En opérant de la même manière pour la sphère ω'_1 on obtient une équation du second degré en ρ'_1 identique à (7), mais dans laquelle le terme en ρ'_1 est précédé du signe $+$; l'équation (7) a donc pour racines ρ_1 et $-\rho'_1$. De la même façon on trouve l'équation

$$(8)\quad \rho_2^2\left[\frac{1}{\sin^2\alpha_1}+\frac{1}{\sin^2\alpha_2}+\frac{1}{\sin^2\alpha_3} + \frac{2\cos\theta_1}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3}+\frac{2\cos\theta_2}{\sin\alpha_3\sin\alpha_1}+\frac{2\cos\theta_3}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}-1\right]$$
$$+2\rho_2\left[\frac{\delta_1}{\sin^2\alpha_1}+\frac{\delta_2}{\sin^2\alpha_2}+\frac{\delta_3}{\sin^2\alpha_3}+\frac{(\delta_2+\delta_3)\cos\theta_1}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3} + \frac{(\delta_3+\delta_1)\cos\theta_2}{\sin\alpha_3\sin\alpha_1}+\frac{(\delta_1+\delta_2)\cos\theta_3}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}-r\right]$$
$$+\frac{\delta_1^2}{\sin^2\alpha_1}+\frac{\delta_2^2}{\sin^2\alpha_2}+\frac{\delta_3^2}{\sin^2\alpha_3}+\frac{2\delta_2\delta_3\cos\theta_1}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3} + \frac{2\delta_3\delta_1\cos\theta_2}{\sin\alpha_3\sin\alpha_1}+\frac{2\delta_1\delta_2\cos\theta_3}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}-r^2=0,$$

qui a pour racines ρ_2 et $-\rho'_2$. Or, on sait que si l'on porte sur les droites d_1, d_2, d_3 à partir de leur intersection P des longueurs $PP_1 = l_1$, $PP_2 = l_2$, $PP_3 = l_3$ et si l'on désigne par l la longueur de la diagonale issue de P dans le parallélépipède construit sur $PP_1P_2P_3$, on a

$$l^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2\,l_2 l_3\cos\theta_1 + 2\,l_3 l_1\cos\theta_2 + 2\,l_1 l_2\cos\theta_3.$$

Supposons que l'on prenne

$$l_1 = \frac{1}{\sin\alpha_1},\qquad l_2 = \frac{1}{\sin\alpha_2},\qquad l_3 = \frac{1}{\sin\alpha_3};$$

cela revient à construire sur le trièdre Θ le parallélépipède ayant ses hauteurs égales à l'unité; si l'on désigne la diagonale issue de P par λ, on a donc

$$\lambda^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha_1}+\frac{1}{\sin^2\alpha_2}+\frac{1}{\sin^2\alpha_3} + \frac{2\cos\theta_1}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3}+\frac{2\cos\theta_2}{\sin\alpha_3\sin\alpha_1}+\frac{2\cos\theta_3}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}.$$

D'autre part, si l'on appelle d la distance OP, on a

$$d^2 = \frac{\delta_1^2}{\sin^2\alpha_1} + \frac{\delta_2^2}{\sin^2\alpha_2} + \frac{\delta_3^2}{\sin^2\alpha_3}$$
$$+ \frac{2\,\delta_2\,\delta_3\cos\theta_1}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3} + \frac{2\,\delta_3\,\delta_1\cos\theta_2}{\sin\alpha_3\sin\alpha_1} + \frac{2\,\delta_1\,\delta_2\cos\theta_3}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}.$$

En vertu des remarques qui précèdent, on peut donc écrire, d'après les équations (7) et (8),

$$\rho_1 - \rho'_1 = \frac{2}{\lambda^2 - 1}\left[\frac{\delta_1}{\sin^2\alpha_1} + \frac{\delta}{\sin^2\alpha_2} + \frac{\delta_3}{\sin^2\alpha_3} + \frac{(\delta_2 + \delta_3)\cos\theta_1}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3}\right.$$
$$\left. + \frac{(\delta_3 + \delta_1)\cos\theta_2}{\sin\alpha_3\sin\alpha_1} + \frac{(\delta_1 + \delta_2)\cos\theta_3}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2} + r\right],$$
$$\rho_1\rho'_1 = \frac{r^2 - d^2}{\lambda^2 - 1} = \rho_2\rho'_2,$$
$$\rho_2 - \rho'_2 = -\frac{2}{\lambda^2 - 1}\left[\frac{\delta_1}{\sin^3\alpha_1} + \frac{\delta_2}{\sin^2\alpha_2} + \frac{\delta_3}{\sin^2\alpha_3} + \frac{(\delta_2 + \delta_3)\cos\theta_1}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3}\right.$$
$$\left. + \frac{(\delta_3 + \delta_1)\cos\theta}{\sin\alpha_3\sin\alpha_1} + \frac{(\delta_1 + \delta_2)\cos\theta_3}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2} - r\right].$$

En désignant par ϖ la puissance de P par rapport à la sphère S, on déduit de là ces trois relations :

$$\rho_1 + \rho_2 - \rho'_1 - \rho'_2 = \frac{4r}{\lambda^2 - 1},$$
$$\rho_1\rho'_1 = \rho_2\rho'_2 = \frac{\varpi}{\lambda^2 - 1},$$
$$\frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{\rho'_2} - \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} = \frac{4r}{\varpi},$$

respectivement identiques aux relations (5), (6) et (4) relatives à la figure plane. On a ainsi ces propriétés :

Pour un trièdre Θ *de grandeur donnée, la somme des rayons des sphères extérieures situées dans ce trièdre et le trièdre opposé diminuée de la somme des rayons des sphères intérieures situées dans les mêmes trièdres est constante quel que soit* P.

Quand un trièdre Θ *de grandeur donnée tourne*

autour de son sommet fixe P, *le produit du rayon de la sphère extérieure située dans le trièdre* Θ *par celui de la sphère intérieure située dans le trièdre opposé est constant; la somme des inverses des rayons des sphères intérieures diminuée de celle des inverses des rayons des sphères extérieures est aussi constante et indépendante de la grandeur du trièdre* Θ.

Par un raisonnement analogue on trouvera des relations du même genre pour les rayons des sphères situées dans les autres trièdres formés par les plans π_1, π_2, π_3; en réunissant les résultats obtenus on aura ces théorèmes :

On considère une sphère S *et trois plans sécants* π_1, π_2, π_3 *formant un trièdre de grandeur donnée; il existe seize sphères qui sont à la fois tangentes à ces plans et à la sphère* S, *huit extérieurement, huit intérieurement. La somme des rayons des huit premières diminuée de la somme des rayons des huit dernières est constante.*

En particulier, si le trièdre formé par les plans π_1, π_2, π_3 *est trirectangle, cette constante est égale à huit fois le rayon de la sphère* S.

Par un point P *pris à l'intérieur d'une sphère* S *on mène trois plans quelconques* π_1, π_2, π_3 *et l'on considère les seize sphères tangentes à la fois à ces plans et à la sphère* S. *La somme des inverses des rayons des sphères intérieures à* S *diminuée de celle des inverses des rayons des sphères extérieures à* S *est constante et égale à huit fois le rapport du diamètre de* S *à la puissance de* P *par rapport à* S.

[K[1]2e]

NOTE SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE;

Par M. A. AURIC.

Généralités. — La géométrie du triangle n'est en somme qu'un chapitre spécial de la Géométrie analytique, et il semble tout indiqué de prendre le triangle donné comme triangle de référence, en faisant un usage exclusif des coordonnées trilinéaires barycentriques.

Il est incontestable, en effet, qu'un choix judicieux de définitions, de notations et de symboles peut faciliter beaucoup, non seulement l'exposition didactique de théorèmes déjà connus, mais aussi la recherche de nouvelles propriétés concernant les figures soi-disant remarquables d'un triangle, telles que points, droites, coniques, etc.

Considérons donc le triangle de référence $A_1 A_2 A_3$ et appelons m_1, m_2, m_3 les coordonnées barycentriques d'un point M, défini par certaines propriétés *intrinsèques* que ce point possède dans le triangle $A_1 A_2 A_3$; en d'autres termes, nous admettons que ce point peut être obtenu en effectuant certaines opérations au moyen des côtés a_1, a_2, a_3 ou des angles A_1, A_2, A_3 du triangle de référence.

Dans ces conditions, comme le côté a_i est proportionnel à $\sin A_i$, la coordonnée m_1 sera proportionnelle à une fonction bien déterminée des angles A_1, A_2, A_3

$$m_1 = k f(A_1, A_2, A_3).$$

Au moyen de la relation

$$A_1 + A_2 + A_3 = \pi,$$

on pourra éliminer A_3 et il viendra

$$m_1 = k\,\varphi(A_1, A_2).$$

A cette coordonnée, on peut faire correspondre la coordonnée conjuguée

$$m'_1 = k'\,\varphi(A_1, A_3),$$

qui différera en général de m_1, à moins que l'on ait

$$\varphi(A_1, A_2) = k''\,\varphi(A_1, A_3),$$

k'' étant une constante indépendante de A_1, A_2, A_3 ou une fonction symétrique par rapport à ces trois angles. On dira dans ce cas que la coordonnée m_1 coïncide avec sa conjuguée m'_1 et l'on écrira

$$m_1 = k\,\varphi_s(A_1, A_2) = k'\,\varphi_s(A_1, A_3).$$

Enfin, il peut arriver que m_1 se réduise à une fonction de A_1 seulement, soit

$$m_1 = k\,\psi(A_1).$$

Considérons d'abord le cas où les coordonnées m_2, m_3 se déduisent de m_1 par une simple permutation circulaire des *angles;* nous obtiendrons les classes suivantes de points :

(I)	$\psi(A_1)$	$\psi(A_2)$	$\psi(A_3)$,
(II)	$\varphi_s(A_1, A_2)$	$\varphi_s(A_2, A_3)$	$\varphi_s(A_3, A_1)$,
(III)	$\varphi(A_1, A_2)$	$\varphi(A_2, A_3)$	$\varphi(A_3, A_1)$.

La classe (I) contient les points M dont les coordonnées s'expriment *explicitement* au moyen d'une même fonction des angles correspondants

$$m_i = \psi(A_i).$$

Si un point N a pour coordonnées n_i avec

$$n_i = f[\psi(A_i)] = f(m_i),$$

on pourra écrire symboliquement

$$N = f(M).$$

En particulier, si $\psi(A_i)$ est une fonction rationnelle des lignes trigonométriques ordinaires de l'angle A_i, $\sin A_i$, $\cos A_i$, et de ses multiples, on sait qu'on pourra l'exprimer rationnellement en fonction de

$$\operatorname{tang} \frac{A_i}{2}.$$

Or, le point de Gergonne L, obtenu en joignant chaque sommet du triangle au point de contact du cercle inscrit avec le côté opposé, a précisément pour coordonnées

$$\lambda \operatorname{tang} \frac{A_1}{2}, \quad \lambda \operatorname{tang} \frac{A_2}{2}, \quad \lambda \operatorname{tang} \frac{A_3}{2}.$$

Dès lors, on pourra, dans beaucoup de cas, exprimer rationnellement un point $\frac{M}{\mu}$ en fonction explicite de $\frac{L}{\lambda}$.

En particulier, l'orthocentre H, les centres des cercles inscrit I et circonscrit O peuvent s'écrire symboliquement

$$\frac{H}{\mu} = (\operatorname{tang} A_i) = \frac{2L\lambda}{\lambda^2 - L^2},$$

$$\frac{I}{\mu} = (\sin A_i) = \frac{2L\lambda}{\lambda^2 + L^2},$$

$$\frac{O}{\mu} = (\sin A_i \cos A_i) = \frac{2L\lambda(\lambda^2 - L^2)}{(L^2 + \lambda^2)^2}.$$

Pour les points de la classe (II), nous avons

$$m_1 = k\,\varphi_s(A_1, A_2) = k'\,\varphi_s(A_1, A_3).$$

Au moyen de la relation

$$A_1 + A_2 + A_3 = \pi,$$

nous pouvons éliminer A_2 et A_3 et nous obtiendrons comme résultant

$$\chi(m_1, A_1) = 0.$$

On obtiendrait évidemment de la même manière

$$\chi(m_2, A_2) = \chi(m_3, A_3) = 0,$$

m_i est ici une fonction *implicite* de A_i et se comporte comme un nombre algébrique ou transcendant, selon que χ est une fonction algébrique ou transcendante en m_i.

Nous pourrons donc, dans beaucoup de cas, assimiler un point M de cette classe à un nombre algébrique, racine d'une équation irréductible, et associer à M les autres points, réels ou imaginaires, également racines de cette équation.

Pour la classe (III), nous associerons à la coordonnée

$$m_1 = \varphi(A_1, A_2),$$

la coordonnée conjuguée

$$m'_1 = \varphi(A_1, A_3).$$

Toute fonction symétrique de m_1 et m'_1 sera évidemment de la forme $\varphi_s(A_1, A_2)$, et appartiendra par conséquent à la classe (II); en particulier, la somme $m_1 + m'_1$ et le produit $m_1 m'_1$ appartiendront à cette dernière classe : dès lors, m_1, m'_1 pourront être considérés comme les racines d'une équation du second degré dont les termes seront des coordonnées appartenant à la classe (II); symboliquement, il en sera de même des points correspondants.

Dans beaucoup de cas, les points de la troisième

classe seront donc des points algébriques de degré $2h$, h étant le degré des points de la deuxième classe auxquels ils peuvent être ramenés.

Si les coordonnées m_2, m_3 ne se déduisent pas de m_1 par une simple permutation circulaire des *angles*, on obtiendra les classes suivantes de points :

(IV) $\psi_1(A_1)$ $\psi_2(A_2)$ $\psi_3(A_3)$,

(V) $\varphi_{s_1}(A_1, A_2)$ $\varphi_{s_2}(A_2, A_3)$ $\varphi_{s_3}(A_3, A_1)$,

(VI) $\varphi_1(A_1, A_2)$ $\varphi_2(A_2, A_3)$ $\varphi_3(A_3, A_1)$.

Considérons un point de la classe (IV), par exemple

(M) $\psi_1(A_1)$ $\psi_2(A_2)$ $\psi_3(A_3)$.

Nous associerons à ce point les points obtenus par une permutation circulaire des *fonctions* ψ_i, qui ici sont différentes,

(M′) $\psi_2(A_1)$ $\psi_3(A_2)$ $\psi_1(A_3)$,

(M″) $\psi_3(A_1)$ $\psi_1(A_2)$ $\psi_2(A_3)$.

Toute fonction symétrique des coordonnées de ces trois points M, M′, M″ donnera pour chaque coordonnée une même fonction de l'angle correspondant : en d'autres termes, on obtiendra les coordonnées d'un point appartenant à la classe (I); on en déduira, comme précédemment, que les points M, M′, M″ se comportent comme des nombres algébriques, racines d'une équation du troisième degré, dont les coefficients sont des points appartenant à la première classe.

Les classes (V) et (VI) se ramèneront de la même manière aux classes (II) et (III); on pourra, par exemple, associer au point

$$\varphi_{s_1}(A_1, A_2),\quad \varphi_{s_2}(A_2, A_3),\quad \varphi_{s_3}(A_3, A_1)$$

les deux points

$$\varphi_{s_2}(A_1, A_2),\quad \varphi_{s_3}(A_2, A_3),\quad \varphi_{s_1}(A_3, A_1),$$
$$\varphi_{s_3}(A_1, A_2),\quad \varphi_{s_1}(A_2, A_3),\quad \varphi_{s_2}(A_3, A_1)$$

et raisonner comme précédemment. Les points des classes (V) et (VI) se comporteront donc comme des nombres algébriques de degré $3h$ ou $6h$, si h est le degré des points algébriques de la deuxième classe auxquels ils peuvent être ramenés.

Finalement, on pourra dire que tout point remarquable du triangle est susceptible d'être défini par une fonction implicite irréductible

$$f(m_i, A_i) = 0$$

et l'étude de ces points remarquables sera ainsi ramenée à celle des nombres algébriques ou transcendants. On remarquera l'importance et la grande généralité de ce résultat.

Points remarquables. — Parmi les points remarquables du triangle, il faut citer en premier lieu ceux dont les coordonnées s'expriment au moyen des *côtés mêmes* du triangle de référence, considérés comme des vecteurs du plan

(I) $\qquad a_1 e^{i\theta_1},\quad a_2 e^{i\theta_2},\quad a_3 e^{i\theta_3},$

(J) $\qquad a_1 e^{-i\theta_1},\quad a_2 e^{-i\theta_2},\quad a_3 e^{-i\theta_3},$

a_i et θ_i étant les modules et les arguments de ces côtés. Les points ainsi obtenus sont situés sur la droite de l'infini

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

et s'appellent les *points cycliques* du plan : on connaît le rôle important qu'ils jouent, soit dans la mesure des distances, soit dans les propriétés des circonférences.

Ainsi la distance de deux points $M(m_1, m_2, m_3)$, $N(n_1, n_2, n_3)$ est donnée par l'expression

$$(m_1 + m_2 + m_3)(n_1 + n_2 + n_3)\,MN = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ a_1 e^{i\theta_1} & a_2 e^{i\theta_2} & a_3 e^{i\theta_3} \end{vmatrix}$$

de même la distance δ du point M à la droite

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0$$

est donnée par l'expression

$$\delta = \frac{2 A_1 A_2 A_3}{m_1 + m_2 + m_3} \frac{p_1 m_1 + p_2 m_2 + p_3 m_3}{p_1 a_1 e^{i\theta_1} + p_2 a_2 e^{i\theta_2} + p_3 a_3 e^{i\theta_3}}.$$

Les points (I) et (J) représentent en quelque sorte, sur la droite de l'infini, les triangles semblables au triangle de référence : on pourrait considérer d'autres triangles dérivant de ce dernier, par exemple ceux dont les angles sont

$$\pi - 2A_1, \quad \pi - 2A_2, \quad \pi - 2A_3$$

ou

$$\frac{\pi}{2} - \frac{A_1}{2}, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{A_2}{2}, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{A_3}{2},$$

ou, plus généralement,

$$k\pi + (1 - 3k)A_1, \quad k\pi + (1 - 3k)A_2, \quad k\pi + (1 - 3k)A_3.$$

En considérant les triangles équilatéraux, on aurait comme points représentatifs

$$G_1(1, j, j^2) \quad \text{et} \quad G_2(1, j^2, j),$$

j et j^2 étant les racines cubiques de l'unité.

Il n'est pas possible de rappeler ici les nombreux points remarquables à titres divers étudiés dans le triangle : nous nous contenterons d'en définir les racines carrées et cubiques.

Si l'on considère le point $M^2(m_1^2, m_2^2, m_3^2)$, on dira qu'il a pour racines carrées les quatre points

$$\begin{array}{ccc} m_1 & m_2 & m_3 \\ -m_1 & m_2 & m_3 \\ m_1 & -m_2 & m_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{array}$$

On peut associer à chacune de ces racines la polaire trilinéaire correspondante

$$\frac{x_1}{\pm m_1} + \frac{x_2}{\pm m_2} + \frac{x_3}{\pm m_3} = 0.$$

On voit aisément que le triangle formé par trois points racines, celui formé par les trois polaires trilinéaires correspondantes et le triangle de référence sont homologiques, le centre et l'axe d'homologie étant précisément la quatrième racine et sa polaire trilinéaire.

Si l'on considère le point $M^3(m_1^3, m_2^3, m_3^3)$, on voit qu'il a neuf racines cubiques que l'on peut répartir en trois triangles comme il suit :

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} m_1, & m_2, & m_3 & m_1 j, & m_2, & m_3 & m_1 j^2, & m_2, & m_3 \\ m_1, & m_2 j, & m_3 j^2 & m_1, & m_2 j, & m_3 & m_1, & m_2 j^2, & m_3 \\ m_1, & m_2 j^2, & m_3 j & m_1, & m_2, & m_3 j & m_1, & m_2, & m_3 j^2 \end{array}$$

Ces trois triangles forment avec le triangle de référence un groupe tel que deux triangles quelconques du groupe sont hexahomologiques entre eux, les centres et les axes d'homologie étant précisément les sommets et les côtés des deux autres triangles.

Avant de passer à l'examen des courbes dérivant de points remarquables, nous allons dire un mot des points qu'on peut faire dériver de deux ou de trois points donnés.

Par exemple, des deux points m_1, m_2, m_3; n_1, n_2, n_3,

on peut déduire les deux points brocardiens

$$m_2 n_3 \pm m_3 n_2, \qquad m_3 n_1 \pm m_1 n_3, \qquad m_1 n_2 \pm m_2 n_1.$$

Si l'on a trois points

$$\begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{matrix}$$

on peut en déduire de nouveaux points, soit en changeant, dans le déterminant représentatif, les lignes en colonnes et réciproquement, soit en remplaçant chaque élément par le mineur correspondant.

On est ainsi conduit à des triples points de la forme

$$\begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_3 & m_1 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{matrix}$$

qui restent invariables par une permutation circulaire, et au déterminant représentatif suivant :

$$\begin{matrix} m_1 n_1 - m_2 n_2 - m_3 n_3 & 2 n_1 n_2 & 2 m_3 m_1 \\ 2 m_1 m_2 & m_2 n_2 - m_3 n_3 - m_1 n_1 & 2 n_2 n_3 \\ 2 n_3 n_1 & 2 m_2 m_3 & m_3 n_3 - m_1 n_1 - m_2 n_2 \end{matrix}$$

dont les mineurs sont proportionnels aux éléments correspondants si l'on a la relation

$$m_1 m_2 m_3 = n_1 n_2 n_3 ;$$

cette égalité signifie que le triple point forme un triangle homologique avec le triangle de référence.

Lorsque les deux points M et N sont confondus, on a le triple point

$$\begin{matrix} m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 & 2 m_1 m_2 & 2 m_3 m_1 \\ 2 m_1 m_2 & m_2^2 - m_3^2 - m_1^2 & 2 m_2 m_3 \\ 2 m_3 m_1 & 2 m_2 m_3 & m_3^2 - m_1^2 - m_2^2 \end{matrix}$$

qui représente le discriminant d'une conique dont l'équation reste la même, soit en coordonnées ponctuelles, soit en coordonnées tangentielles.

Courbes remarquables. — Parmi les courbes dérivant d'un point remarquable M, nous citerons tout d'abord celles dont l'équation est

$$\left(\frac{x_1}{m_1}\right)^\alpha + \left(\frac{x_2}{m_2}\right)^\alpha + \left(\frac{x_3}{m_3}\right)^\alpha = 0.$$

Pour $\alpha = 1$, on obtient la polaire trilinéaire de M, dont les propriétés sont bien connues.

Pour $\alpha = 2$, on a une conique dont les points d'intersection avec les côtés de $A_1A_2A_3$ sont conjugués harmoniques par rapport aux sommets A_i et que, pour cette raison, on appelle *conique conjuguée*.

Le centre de cette conique est en $M^2(m_1^2, m_2^2, m_3^2)$: elle est une parabole si

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 0;$$

une hyperbole équilatère si

$$\frac{a_1^2}{m_1^2} + \frac{a_2^2}{m_2^2} + \frac{a_3^2}{m_3^2} = 0;$$

un cercle si

$$m_i = \operatorname{tang} A_i.$$

Pour $\alpha = -1$, on obtient une conique *circonscrite* au triangle de référence : son centre a pour coordonnées

$$m_1(m_2 + m_3 - m_1), \quad m_2(m_3 + m_1 - m_2), \quad m_3(m_1 + m_2 - m_3);$$

cette conique est une parabole si

$$\sqrt[2]{m_1} + \sqrt[2]{m_2} + \sqrt[2]{m_3} = 0;$$

une hyperbole équilatère si

$$\frac{m_1}{\operatorname{tang} A_1} + \frac{m_2}{\operatorname{tang} A_2} + \frac{m_3}{\operatorname{tang} A_3} = 0;$$

un cercle si

$$m_i = \sin^2 A_i.$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient une conique *inscrite* dans le triangle de référence et dont le centre a pour coordonnées

$$\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}, \quad \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1}, \quad \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Cette conique est une parabole si

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = 0;$$

une hyperbole équilatère si

$$\frac{a_1^2}{m_1^2} + \frac{a_2^2}{m_2^2} + \frac{a_3^2}{m_3^2}$$
$$- 2\frac{a_2 a_3}{m_2 m_3}\cos A_1 - 2\frac{a_3 a_1}{m_3 m_1}\cos A_2 - \frac{a_1 a_2}{m_1 m_2}\cos A_3 = 0;$$

un cercle si

$$m_1 = \operatorname{tang}\frac{A_1}{2}.$$

Pour $\alpha = 3$, on a une cubique non singulière dont la hessienne est formée par les côtés de $A_1 A_2 A_3$ qui sont des tangentes inflexionnelles à la cubique : les points de contact se trouvent sur la polaire trilinéaire de M.

Pour $\alpha = \frac{1}{3}$, on a une cubique ayant un point double en M et les tangentes inflexionnelles comme dans le cas précédent.

Pour $\alpha = 4$, $\alpha = -2$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient des quar-

tiques qui ont été étudiées par de nombreux géomètres.

On pourrait définir de nouvelles courbes comme lieux géométriques des centres ou des foyers de coniques satisfaisant à certaines conditions : il nous suffira de rappeler les notions très fécondes de *faisceaux* et de *réseaux* de courbes qui constituent des combinaisons linéaires de *deux* ou de *trois* courbes données.

Considérons, par exemple, le faisceau obtenu avec une conique conjuguée et une conique circonscrite

$$\sum \frac{x_1^2}{m_1^2} + \lambda \sum \frac{x_2 x_3}{n_2 n_3} = 0.$$

Le discriminant de cette équation aura une racine double; en d'autres termes, toutes les coniques du faisceau seront tangentes si l'on a

$$\left(\frac{n_1}{m_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{n_2}{m_2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{n_3}{m_3}\right)^{\frac{2}{3}} = 0.$$

Lorsque $m_i = n_i$, toutes les coniques du faisceau sont bitangentes et l'on détermine facilement la valeur de λ pour laquelle la conique est une parabole, une hyperbole équilatère, une conique inscrite dans $A_1 A_2 A_3$ ....

On pourrait étudier également le faisceau des coniques bitangentes à une conique inscrite dans $A_1 A_2 A_3$ au nombre desquelles se trouve la *lemoinienne*, généralisation du premier cercle de Lemoine : de même que le faisceau formé par deux coniques inscrites dans $A_1 A_2 A_3$ au nombre desquelles se trouve l'*eulérienne*, généralisation du cercle des neuf points, etc.

Parmi les coniques d'un réseau, on étudiera surtout

celles qui sont conjuguées, circonscrites ou inscrites à un triangle déterminé. Ce triangle peut être obtenu, soit en prenant trois des racines carrées d'un point M^2 (coniques de de Longchamps), soit en prenant un des trois triangles formés par les neuf racines cubiques de M^3 (brocardiennes ou généralisation du cercle de Brocard).

Ces indications sommaires suffiront à montrer l'immense complexité des propriétés des points et des figures soi-disant remarquables dont l'étude fait l'objet de la Géométrie du triangle.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2231.

(1915, p. 52.)

Soient a une racine simple de l'équation $\varphi(x) = 0$ *et* $F(x)$ *un polynome défini par l'équation*

$$\varphi^2(x) = (x-a)^2 F(x).$$

Démontrer qu'on a

$$F(a) = \varphi'^2(a),$$
$$F'(a) = \varphi'(a)\varphi''(a),$$
$$F''(a) = \frac{1}{4}\varphi'^2(a) + \frac{1}{3}\varphi'(a)\varphi'''(a), \quad \ldots.$$

Supposant qu'on ait

$$\varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

et que $f(x)$ *soit un polynome de degré* m $(m < 2n)$, *véri-*

fier l'identité

$$\frac{f(x)}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{f(a_i)}{[\varphi'(a_i)]^2} \frac{1}{(x-a_i)^2}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{f'(a_i)\varphi'(a_i) - f(a_i)\varphi''(a_i)}{[\varphi'(a_i)]^3} \frac{1}{x-a_i}.$$

Les nombres a_1, a_2, ..., a_n étant connus, déterminer le polynome $f(x)$ par la condition que la relation précédente ne contienne pas de termes de la forme

$$\frac{A_i}{x-a_i}$$

et, dans ce cas, trouver la forme de la relation considérée.

N. Abramescu.

Solution

Par M. T. Ono.

1° La différentiation n fois de l'équation

$$(x-a)^2 F(x) = \varphi(x)\varphi(x)$$

donne

$$(x-a)^2 F^{(n)}(x) + 2n(x-a)F^{(n-1)}(x) + n(n-1)F^{(n-2)}(x)$$

$$= \varphi(x)\varphi^{(n)}(x) + n\varphi'(x)\varphi^{(n-1)}(x)$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2!}\varphi''(x)\varphi^{(n-2)}(x + \ldots + \varphi^{(n)}(x)\varphi(x)$$

et, par suite,

$$n(n-1)F^{(n-2)}(a) = n\varphi'(a)\varphi^{(n-1)}($$

$$+ \frac{n(n-1)}{2!}\varphi''(a)\varphi^{(n-2)}(a) + \ldots$$

$$+ n\varphi^{(n-1)}(a)\varphi'(a).$$

En faisant $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, on trouve

$$\begin{aligned} F(a) &= \varphi'^2(a), \\ F'(a) &= \varphi'(a)\varphi''(a), \\ 12\,F''(a) &= 8\varphi'(a)\varphi'''(a) + 6\varphi''^2(a), \\ 20\,F'''(a) &= 10\varphi'(a)\varphi^{\text{IV}}(a) + 20\varphi''(a)\varphi'''(a). \quad \ldots \end{aligned}$$

[La relation donnée pour $F''(a)$ dans l'énoncé est en faute.]

2° Posons, selon l'usage,

$$\frac{f(x)}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2} = \sum \frac{A'_i}{(x-a_i)^2} + \sum \frac{A_i}{x-a_i},$$

c'est-à-dire

$$f(x) = \Sigma A'_i F_i(x) + \Sigma A_i(x-a_i)F_i(x),$$

où

$$(x-a_i)^2 F_i(x) = (x-a_1)^2\ldots(x-a_n)^2 = \varphi^2(x).$$

On a d'abord

$$A'_i = \frac{f(a_i)}{F_i(a_i)} = \frac{f(a_i)}{\varphi'^2(a_i)}$$

et puis

$$f'(a_i) = A'_i F'(a_i) + A_i F_i(a_i);$$

donc

$$A_i = \frac{f'(a_i) - A'_i F'(a_i)}{F_i(a_i)} = \frac{f'(a_i)\varphi'(a_i) - f(a_i)\varphi''(a_i)}{\varphi'^3(a_i)},$$

car, d'après 1°,

$$F_i(a_i) = \varphi'^2(a_i), \qquad F'(a_i) = \varphi'(a_i)\varphi''(a_i).$$

3° Dans le cas $A_i = 0$, on a

$$f'(a_i)\varphi'(a_i) - f(a_i)\varphi''(a_i) = 0,$$

donc

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}$$

pour $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$; ainsi, à un facteur numérique près,

$$f(x) = \varphi'(x).$$

On a alors

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} = \sum \frac{1}{\varphi'(a_i)}\,\frac{1}{(x-a_i)^2}.$$

2235.

(1915, p. 54.)

Soient A, B, C, D *les pieds des normales, issues d'un point* P ; *a une ellipse d'axes* Ox *et* Oy. *Les points* B, C, D *et le point* A′, *diamétralement opposé sur l'ellipse au point* A, *sont sur un cercle, dit « cercle de Joachimsthal ». Démontrer que le centre de ce cercle peut être obtenu par la construction suivante : Soient* α *et* β *les points de rencontre de la normale en* A *avec les axes* Ox *et* Oy, M *le point d'intersection des perpendiculaires élevées par ces points aux axes,* M_1 *le symétrique de* M *par rapport à* O ; *le centre cherché est le milieu du segment* M_1P.

Ce théorème résulte de l'équation du cercle de Joachimsthal mise sous une forme convenable.

F. Balitrand.

Solution
Par M. R. Bouvaist.

Si $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ est l'équation de l'ellipse; si x_0, y_0 sont les coordonnées du point A, α et β celles du point P, le cercle de Joachimsthal a pour équation

$$x^2+y^2-y\left(\beta+\frac{c^2y_0}{b^2}\right) \\ -x\left(\alpha-\frac{c^2x_0}{a^2}\right)-\beta y_0-\alpha x_0+\frac{c^2x_0^2}{a^2}-a^2=0.$$

Si l'on remarque que les coordonnées du point M_1 sont

$$x=-\frac{c^2x_0}{a^2}, \qquad y=\frac{c^2y_0}{b^2},$$

on a la proposition à démontrer.

Autre solution de M. T. Ono.

2236.

(1915, p. 55.)

Trouver l'intégrale

$$\int^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4x-\sin^2x+\lambda}.$$

E.-N. Barisien.

SOLUTION
Par M. R. BOUVAIST.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x - \sin^2 x + \lambda} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8\,dx}{(8\lambda - 1) + \cos 4x},$$

ou, en posant $\operatorname{tang} 2x = u$,

$$\frac{1}{4\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1 + u^2\,\frac{4\lambda - 1}{4\lambda}} = 8\sqrt{\frac{\lambda}{4\lambda - 1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du\sqrt{\frac{4\lambda+1}{4\lambda}}}{1 + u^2\,\frac{4\lambda - 1}{4\lambda}}$$
$$= 4\pi\sqrt{\frac{\lambda}{4\lambda - 1}}.$$

Autre solution de M. ONO.

2237.

(1915, p. 55.)

Les trois équations

$$(1)\qquad (x - 2a)(2x + a)(x + 6a)(2x - 3a) - 4ax(3x - 4a)(4x - 9a) = 0,$$

$$(2)\qquad \sqrt[3]{a\sqrt{2a - 3x} + (a - x)\sqrt{x + 2a}} - \sqrt{a\sqrt{2a - 3x} - (a - x)\sqrt{x + 2a}} = \sqrt{a}\sqrt[3]{2\sqrt{2}},$$

$$(3)\qquad \sqrt[6]{a\sqrt{a} + \sqrt{a^3 - x^3}} + \sqrt[6]{a\sqrt{a} - \sqrt{a^3 - x^3}} = \sqrt[6]{2a\sqrt{a}}$$

ont deux racines communes $\frac{a}{4}(9 \pm \sqrt{33})$ *qui sont racines doubles de* (1).

Les autres racines de l'équation (2) *sont*

$$0, \quad -a(3 \pm \sqrt{-3})\;\frac{a}{4}(3 \pm 5\sqrt{3}).$$

Les autres racines de l'équation (3) *sont*

$$0, \quad \frac{a}{8}(9 \pm \sqrt{33})(-1 + \sqrt{3}), \quad \frac{a}{8}(9 \pm \sqrt{33})(-1 - \sqrt{3}).$$

E.-N. BARISIEN.

SOLUTION
Par M. R. BOUVAIST.

Posons dans (1)

$$x = t + \frac{9a}{4},$$

cette équation devient

$$\left(t + \frac{a}{4}\right)\left(t + \frac{11a}{4}\right)\left(t + \frac{33a}{4}\right)\left(t - \frac{3a}{4}\right)$$
$$- 4at\left(t + \frac{9a}{4}\right)\left(3t + \frac{11a}{4}\right) = 0$$

ou encore

$$\left(t^2 - \frac{33}{16}a^2\right)^2 = 0;$$

les racines de (1) sont donc doubles et égales à

$$\frac{a}{4}(9 \pm \sqrt{33}).$$

L'équation (2) élevée au cube s'écrit

$$2(a - x)\sqrt{x + 2a} = \sqrt{a}\sqrt[3]{2\sqrt{2}}(2a + 3\sqrt[3]{-x^3})$$

ou, en désignant par ε l'une des racines cubiques de -1,

$$x[2x^2 - 9a\varepsilon^2 x - 6a^2(1 + 2\varepsilon)] = 0,$$

d'où tout d'abord la racine $x = 0$.

Si

$$\varepsilon = -1$$

on a l'équation

$$2x^2 - 9ax + 6a^2 = 0$$

dont les racines sont

$$\frac{a}{4}(9 \pm \sqrt{33}).$$

Si

$$\varepsilon = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$$

on a l'équation

$$4x^2 - 9a(\sqrt{-3} - 1)x - 6a^2(2 + \sqrt{-3}) = 0$$

dont les racines sont

$$-a(3-\sqrt{3}),\quad \frac{a}{4}(3+5\sqrt{-3}).$$

Si

$$\varepsilon = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$$

on a l'équation

$$4x^2+9a(\sqrt{-3}+1)x-6a^2(2-\sqrt{-3})=0$$

dont les racines sont

$$-a(3+\sqrt{3}),\quad \frac{a}{4}(3-5\sqrt{-3}).$$

Si nous posons dans (3)

$$u=\sqrt[6]{a\sqrt{a}+\sqrt{a^3-x^3}},\qquad v=\sqrt[6]{a\sqrt{a}-\sqrt{a^3-x^3}},$$

nous avons

$$uv=\sqrt[6]{x^3}\qquad \text{et} \qquad u+v=\sqrt[6]{2a\sqrt{a}}=\mathrm{K};$$

élevons les deux membres de cette dernière équation à la puissance 6, il vient

$$uv[6(u^4+v^4)+15uv(u^2+v^2)+20u^2v^2]=0,$$

d'où l'on déduit, en supposant $uv\neq 0$, c'est-à-dire $x\neq 0$,

$$2u^2v^2-4\mathrm{K}^2uv+\mathrm{K}^4=0,$$

d'où

$$uv=\frac{\mathrm{K}^2}{4}(9\pm\sqrt{33}),$$

ou

$$\sqrt[6]{x^3}=\frac{\mathrm{K}^2}{4}(9\pm\sqrt{33}),$$

d'où les racines

$$x=\frac{\mathrm{K}^4}{4^2}(9\pm\sqrt{33})^2\varepsilon;$$

ε étant l'une quelconque des racines cubiques de l'unité, l'énoncé n'est donc pas vérifié en ce qui concerne l'équation (3).

[I 19c]

SUR QUELQUES ÉQUATIONS HOMOGÈNES INDÉTERMINÉES DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. MATHIEU WEILL.

I. Soit à résoudre, en nombres entiers, positifs ou négatifs, l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3.$$

Une solution bien connue est

$$x_1 = 3, \qquad y_1 = 4, \qquad z_1 = 5, \qquad t_1 = 6.$$

Une seconde solution sera

$$x_2 = 1, \qquad y_2 = 0, \qquad z_2 = 0, \qquad t_2 = 1.$$

Partant des formules

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1), \\ y &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1), \\ z &= z_1 + \lambda(z_2 - z_1), \\ t &= t_1 + \lambda(t_2 - t_1), \end{aligned}$$

on trouve pour λ une équation du troisième degré qui admet les solutions évidentes $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ et $\lambda = \frac{9}{8}$, qui donne pour x, y, z, t les valeurs $\frac{-6}{8}$, $\frac{-4}{8}$, $\frac{-5}{8}$ et $\frac{-3}{8}$, on retombe ainsi sur la première solution; mais si l'on prend la solution

$$x_3 = -4, \qquad y_3 = -5, \qquad z_3 = 6, \qquad t_3 = 3,$$

en posant

$$x = x_1 + \lambda(x_3 - x_1),$$
$$y = y_1 + \lambda(y_3 - y_1),$$
$$z = z_1 + \lambda(z_3 - z_1),$$
$$t = t_1 + \lambda(t_3 - t_1),$$

on trouve encore $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, puis $\lambda = \frac{37}{3.58}$, d'où

$$x = 263, \qquad y = 363, \qquad z = 907, \qquad t = 933,$$

solution irréductible, puisque 263 est premier. On a donc

$$\overline{933}^3 = \overline{907}^3 + \overline{363}^3 + \overline{263}^3.$$

Pour obtenir d'autres solutions, posons

$$x = 3 + u,$$
$$y = 4 + \mu u,$$
$$z = 5 + \nu u,$$
$$t = 6 + \lambda u,$$

d'où

$$(6 + \lambda u)^3 = (3 + u)^3 + (4 + \mu u)^3 + (5 + \nu u)^3$$

et, en posant $\lambda^3 \mu^3 + \nu^3 + 1$,

$$u(3 + 4\mu^2 + 5\nu^2 - 6\lambda^2) = 36\lambda - 25\nu - 16\mu - 9.$$

Prenons $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $\nu = 1$, il vient

$$u = 3, \qquad x = 6, \qquad y = 1, \qquad z = 8, \qquad t = 9,$$

d'où

$$9^3 = 8^3 + 6^3 + 1^3$$

qui est une nouvelle solution très simple.

Prenons, maintenant, $\lambda = 9$, $\mu = 8$, $\nu = 6$; il vient

$$u = \frac{-37}{47},$$

d'où

$$x = 104, \qquad y = -108, \qquad z = 13, \qquad t = -51,$$

d'où

$$\overline{108}^3 = \overline{104}^3 + \overline{51}^3 + \overline{13}^3.$$

Enfin, prenons $\mu = -9$, $\nu = 12$, $\lambda = 10$, il vient

$$u = \frac{65}{149}$$

et

$$x = 512, \qquad y = 11, \qquad z = 1525, \qquad t = 1544,$$

d'où

$$\overline{1544}^3 = \overline{1525}^3 + \overline{512}^3 + \overline{11}^3.$$

II. Supposons connues deux solutions de l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3.$$

Si x_1, y_1, z_1, t_1 est une solution et x_2, y_2, z_2, t_2 en est une autre, posons

$$x = x_1 + \delta x_2,$$
$$y = y_1 + \delta y_2,$$
$$z = z_1 + \delta z_2,$$
$$t = t_1 + \delta t_2;$$

il vient

$$(t_1 + \delta t_2)^3 = (x_1 + \delta x_2)^3 + (y_1 + \delta y_2)^3 + (z_1 + \delta z_2)^3,$$

d'où

$$\delta = \frac{x_2 x_1^2 + y_2 y_1^2 + z_2 z_1^2 - t_2 t_1^2}{x_2^2 x_1 + y_2^2 y_1 + z_2^2 z_1 - t_2^2 t_1},$$

ce qui donne une troisième solution, et ainsi de suite. Nous avons appliqué cette méthode dans ce qui précède. On peut, comme l'on voit, obtenir une infinité de solutions de l'équation proposée.

III. Soit l'équation

$$x^3 + y^3 = z^3 + t^3.$$

Soit x_1, y_1, z_1, t_1 une solution; posons

$$x = x_1 + \rho u,$$
$$y = y_1 + \lambda u,$$
$$z = z_1 + \mu u,$$
$$t = t_1 + \nu u;$$

il vient

$$u^2[\rho^3 + \lambda^3 - \mu^3 - \nu^3] + 3u[\rho^2 x_1 + \lambda^2 y_1 - \mu^2 z_1 - \nu^2 t_1] + 3[\rho x_1^2 + \lambda y_1^2 - \mu z_1^2 - \nu t_1^2] = 0.$$

Première méthode. — Déterminons λ, μ, ν, ρ par la condition

$$\rho x_1^2 + \lambda y_1^2 - \mu z_1^2 - \nu t_1^2 = 0;$$

il vient

$$u = -3\,\frac{\rho^2 x_1 + \lambda^2 y_1 - \mu^2 z_1 - \nu^2 t_1}{\rho^3 + \lambda^3 - \mu^3 - \nu^3},$$

d'où l'on tire x, y, z, t, c'est-à-dire une infinité de solutions.

Prenons, par exemple,

$$x_1 = 3, \qquad y_1 = 4, \qquad z_1 = -5, \qquad t_1 = 6,$$

puis

$$\lambda = 1, \qquad \mu = 1, \qquad \nu = 1,$$

d'où

$$\rho = \frac{25\mu + 36\nu - 16\lambda}{9} = 5,$$

d'où

$$u = -\frac{117}{62}$$

et

$$x = -399, \quad y = 131, \quad z = -427, \quad t = 255,$$

en négligeant le dénominateur 62, ce qui est permis, d'où

$$\overline{427}^3 + \overline{131}^3 = \overline{255}^3 + \overline{399}^3.$$

Deuxième méthode. — Considérons, plus simple-

ment, la solution

$$x_1 = 1, \qquad y_1 = 1, \qquad z_1 = 1, \qquad t_1 = 1$$

et posons

$$\begin{aligned} x &= 1 + \rho u, \\ y &= 1 + \lambda u, \\ z &= 1 + \mu u, \\ t &= 1 + \nu u; \end{aligned}$$

il vient

$$u^2[\rho^3 + \lambda^3 - \mu^3 - \nu^3] \\ + 3u[\rho^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2] + 3(\rho + \lambda - \mu - \nu) = 0.$$

Choisissons pour λ, μ, ν, ρ une solution de l'équation

$$\rho^3 + \lambda^3 - \mu^3 - \nu^3 = 0;$$

en d'autres termes, supposons connue une solution de l'équation

$$x^3 + y^3 - z^3 - t^3 = 0,$$

il vient

$$u = -\frac{\rho + \lambda - \mu - \nu}{\rho^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2}.$$

Soit, par exemple,

$$\lambda = 3, \qquad \rho = 4, \qquad \mu = -5, \qquad \nu = 6;$$

on en déduit

$$u = \frac{1}{6}$$

et

$$x = \frac{10}{6}, \qquad y = \frac{9}{6}, \qquad z = \frac{1}{6}, \qquad t = \frac{12}{6},$$

d'où

$$\overline{10}^3 + \overline{9}^3 = \overline{12}^3 + 1^3,$$

solution très simple.

En général, on a

$$x = 1 + \rho u = \frac{\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 - \rho(\lambda - \mu - \nu)}{D},$$

$$y = 1 + \lambda u = \frac{\rho^2 - \mu^2 - \nu^2 - \lambda(\rho - \mu - \nu)}{D},$$

$z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$t = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$:

on peut négliger le dénominateur commun D.

Prenons, par exemple, en nous servant du résultat précédent,

$$\lambda = 10, \qquad \rho = -1, \qquad \mu = 12, \qquad \nu = -9;$$

il vient, en négligeant le dénominateur commun,

$$x = 59, \qquad y = 92, \qquad z = 98, \qquad t = 35,$$

d'où

$$\overline{92}^3 + \overline{39}^3 = \overline{98}^3 + \overline{35}^3$$

et ainsi de suite.

IV. De l'équation

$$x^3 = y^3 + z^3 + t^3 + u^3,$$

considérons les deux solutions :

$$y_1 = 0, \qquad x_1 = 6, \qquad z_1 = 3, \qquad t_1 = 4, \qquad u_1 = 5,$$
$$y_2 = 1, \qquad x_2 = 1, \qquad z_2 = 1, \qquad t_2 = -1, \qquad u_2 = 0.$$

Posons

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1),$$
$$y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où

$$(6 - 5\lambda)^3 = \lambda^3 + (3 - 2\lambda)^3 + (4 - 5\lambda)^3 + (5 - 5\lambda)^3$$

ou

$$132\lambda^2 + A\lambda + 129 = 0,$$

équation qui admet la solution $\lambda = 1$, puis $\lambda = \frac{129}{132} = \frac{43}{44}$, d'où

$$x = 49, \quad y = 43, \quad z = 46, \quad t = -39, \quad u = 5,$$

d'où

$$\overline{49}^3 + \overline{39}^3 = \overline{43}^3 + \overline{46}^2 + \overline{5}^3.$$

V. Équation

$$ax^3 + by^3 + cz^3 = 0.$$

Soit une solution x, y, z; posons

$$X = x + \lambda\delta,$$
$$Y = y + \lambda'\delta,$$
$$Z = z + \delta.$$

Annulons le coefficient de δ dans l'équation

$$aX^3 + bY^3 + cZ^3 = 0,$$

il vient

$$a\lambda x^2 + b\lambda' y^2 + cz^2 = 0$$

et

$$\delta = -3by^3 \frac{by^3(a\lambda^2 x + cz) + (cz^2 + a\lambda x^2)^2}{b^2 y^6 (a\lambda^3 + c) - (cz^2 + a\lambda x^2)^3};$$

le numérateur se réduit à $(\lambda x - z)^2$, et le dénominateur est divisible par $(\lambda x - z)^2$, et la solution devient, en négligeant $(\lambda x - z)$,

$$X = x(by^3 - cz^3),$$
$$Y = y(cz^3 - ax^3),$$
$$Z = z(ax^3 - by^3),$$

qui donne une nouvelle solution quand on en connaît une, et par conséquent, une suite, simplement infinie, de solutions.

Soit, par exemple, l'équation

$$2x^3 + 3y^3 - 13z^3 = 0,$$

qui admet la solution évidente

$$x = 2, \qquad y = -1, \qquad z = 1\,;$$

elle admet une autre solution

$$\begin{aligned} X &= 20, \\ Y &= 29, \\ Z &= 19, \end{aligned}$$

d'où

$$2.\overline{20}^3 + 3.\overline{29}^3 = 13.\overline{19}^3.$$

Considérons, de même, l'équation

$$x^3 + y^3 - 43\,z^3 = 0,$$

qui admet la solution

$$x = 1, \qquad y = 7, \qquad z = 2\,;$$

elle admet une autre solution

$$\begin{aligned} X &= 687 = 3.229, \\ Y &= -7.345 = -3.805, \\ Z &= -2.343 = -3.228, \end{aligned}$$

d'où

$$\overline{229}^3 + 43.\overline{228}^3 = \overline{805}^3.$$

Soit, encore, l'équation

$$x^3 + y^3 - 19\,z^3 = 0,$$

qui admet la solution

$$x = 3, \qquad y = 5, \qquad z = 2\,;$$

elle admet aussi la solution

$$\begin{aligned} X &= 831, \\ Y &= -895, \\ Z &= -196. \end{aligned}$$

VI. Soit l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 + u^3 + v^3 = 0.$$

Nous avons les deux solutions

$$\begin{aligned}
x_1 &= -6, & x_2 &= -1;\\
y_1 &= 3, & y_2 &= 1;\\
z_1 &= 0, & z_2 &= -1;\\
t_1 &= 5, & t_2 &= 1;\\
u_1 &= 0, & u_2 &= -1;\\
v_1 &= 4, & v_2 &= 1.
\end{aligned}$$

Posons

$$x = x_2 + \lambda(x_1 - x_2),$$
$$y = y_2 + \lambda(y_1 - y_2).$$

On en déduit une équation en λ qui admet les solutions

$$\lambda = 0, \qquad \lambda = 1, \qquad \lambda = -\frac{3}{4},$$

d'où

$$x = 11, \quad y = -2, \quad z = -7, \quad t = -8, \quad u = -7, \quad v = -5,$$

d'où

$$\overline{11}^3 = 2^3 + 7^3 + 8^3 + 7^3 + 5^3.$$

VII. Considérons l'équation

$$ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$$

et deux solutions

$$x'y'z', \quad x''y''z''.$$

Posons

$$x = x' + \delta x'',$$
$$y = y' + \delta y'',$$
$$z = z' + \delta z'',$$

d'où

$$\delta = -\frac{ax'^2x'' + by'^2y'' + cz'^2z''}{ax'x''^2 + \ldots},$$

d'où

$$x = by'y''(x'y'' - y'x'') + cz'z''(x'z'' - z'x''),$$
$$y = cz'z''(y'z'' - z'y'') + ax'x''(y'x'' - x'y''),$$
$$z = ax'x''(z'x'' - x'z'') + by'y''(z'y'' - y'z'');$$

cette solution ne rentre pas dans la suite des solutions du paragraphe V.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^3 + y^3 = 2z^3,$$

qui admet la solution

$$x' = 1, \quad y' = 1, \quad z' = 1;$$

soit x'', y'', z'' une autre solution, une troisième solution sera donnée par les formules

$$x = y''^2 - x''y'' - 2z''^2 + 2x''z'',$$
$$y = x''^2 - x''y'' - 2z''^2 + 2z''y'',$$
$$z = x''^2 + y''^2 - x''z'' - y''z'',$$

d'où l'on déduit ce résultat, purement algébrique, à savoir : si l'on a

$$x^3 + y^3 = 2z^3,$$

on a aussi

$$X^3 + Y^3 = 2Z^3,$$

avec

$$X = y^2 - xy - 2z^2 + 2xz,$$
$$Y = x^2 - xy - 2z^2 + 2zy,$$
$$Z = x^2 + y^2 - xz - yz.$$

Une seule solution x', y', z', de l'équation

$$ax^3 + by^3 + cz^3 = 0,$$

en fournit immédiatement une deuxième, x'', y'', z'', par le procédé du paragraphe V; d'où, par la méthode précédente, on déduit une troisième solution, et ainsi de suite.

Considérons, par exemple, l'équation

$$ax^3 + by^3 + cz^3 = 0,$$

qui admet la solution

$$x' = 1, \quad y' = 1, \quad z' = 1,$$

si l'on a

$$a + b + c = 0.$$

Elle admet la solution

$$x'' = b - c,$$
$$y'' = c - a,$$
$$z'' = a - b,$$

puis

$$x''' = (b - c)[b(c - a)^3 - c(a - b)^3],$$
$$y''' = (c - a)[c(a - b)^3 - a(b - c)^3],$$
$$z''' = (a - b)[a(b - c)^3 - b(c - a)^3].$$

En combinant, d'autre part, les solutions x', y', z', x'', y'', z'', par les formules du paragraphe VII, on trouve de nouvelles solutions, dont la première est

$$x = b(c - a)(2c - a - b) + c(a - b)(a + c - 2b),$$
$$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La même méthode s'applique à l'équation

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0.$$

Si l'on a deux solutions, on en a une troisième par les formules

$$x = by'y''(x'y'' - x''y') + cz'z''(x'z'' - x''z') + dt't''(x't'' - x''t'),$$
$$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$t = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soit, par exemple, l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3\,t^3 = 0$$

qui admet la solution

$$x' = 1, \qquad y' = 1, \qquad z' = 1, \qquad t' = 1;$$

si l'on connaît une autre solution x, y, z, t on en aura une troisième par les formules

$$\begin{aligned}
X &= y(y-x) + z(z-x) - 3\,t(t-x),\\
Y &= z(z-y) - 3\,t(t-y) + x(x-y),\\
Z &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
T &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ce résultat, purement algébrique, donne une relation

$$X^3 + Y^3 + Z^3 - 3\,T^3 = 0,$$

entre quatre quantités quelconques x, y, z, t, liées par la relation

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3\,t^3 = 0.$$

On peut, évidemment, généraliser ces formules.

Pour résoudre l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3\,t^3 = 0,$$

nous pouvons, suivant une méthode déjà indiquée, poser

$$\begin{aligned}
x &= 1 + \lambda\delta,\\
y &= 1 + \lambda'\delta,\\
z &= 1 + \lambda''\delta,\\
t &= 1 + \delta;
\end{aligned}$$

d'où, en annulant le coefficient de δ, il vient

$$\lambda + \lambda' + \lambda'' = 3,$$

$$\delta = -3\,\frac{\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 - 3}{\lambda^3 + \lambda'^3 + \lambda''^3 - 3},$$

ce qui donne une double infinité de valeurs pour x, y, z, t. Particularisons en prenant $\lambda = 2$, il vient

$$\lambda + \lambda' = 1,$$

d'où

$$x = -2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 2,$$
$$y = \quad 2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda,$$
$$z = -3\lambda^2 + 3\lambda - 2,$$
$$t = -\lambda^2 + \lambda.$$

En donnant à λ une valeur entière ou fractionnaire, positive ou négative, on aura une suite infinie de solutions. On peut remarquer que $x + y + z = 3t$, donc l'équation

$$9(x^3 + y^3 + z^3) = (x + y + z)^3$$

admet les mêmes solutions en x, y, z avec le paramètre arbitraire λ, ce qui donne encore une identité algébrique.

VIII. Nous allons étudier certaines équations indéterminées en partant d'une identité nouvelle que nous allons établir. Considérons l'équation

$$x^3 - y^3 = a.b;$$

on peut la résoudre en prenant

$$x - y = a,$$
$$x^2 + xy + y^2 = b,$$

d'où

$$x = a + y,$$
$$3y^2 + 3ay + a^2 - b = 0,$$
$$y = \frac{-3a \pm \sqrt{12b - 3a^2}}{b}.$$

Posons

$$12b - 3a^2 = t^2,$$

$$b = \frac{3a^2 + t^2}{12}, \qquad a = 2a', \qquad t = 6t',$$

$$b = a'^2 + 3t'^2.$$

Exprimons que b est un cube,

$$a'^2 + 3t'^2 = \lambda^3 = (u^2 + 3v^2)^3,$$

d'où

$$a' + t'\sqrt{-3} = (u + v\sqrt{-3})^3,$$

d'où

$$a' = u^3 - 9uv^2,$$
$$t' = 3u^2v - 3v^3;$$
$$y = t' - a',$$
$$x = t' + a';$$
$$y = 3u^2v - 3v^3 - u^3 + 9uv^2,$$
$$x = 3u^2v - 3v^3 + u^3 - 9uv^2,$$

d'où l'identité

$$(1) \quad [3u^2v - 3v^2 + u^3 - 9v^2u]^3 + [u^3 + 3v^3 - 3u^2v - 9uv^2]^3$$
$$\equiv 2(u^3 - 9uv^2)(u^2 + 3v^2)^3.$$

Faisons $v = 1$, $u = 4$; on en déduit que l'équation

$$x^3 + y^3 = 7z^3$$

admet la solution

$$x = 73, \qquad y = -17, \qquad z = 38.$$

Faisons $v = 1$, $u = 6$; on en déduit que l'équation

$$x^3 + y^3 = 12z^2$$

admet la solution

$$x = 19, \qquad y = 89, \qquad z = 39.$$

En faisant $u = 7$, $v = 3$, on retrouve la solution, précédemment obtenue, de l'équation

$$x^3 + y^3 = 7z^3.$$

En faisant $v=2$, $u=3$, on a

$$u^3-9uv^2=-3.27;$$

l'équation

$$x^3+y^3=+6z^3$$

admet donc la solution

$$x=17, \qquad y=37, \qquad z=21.$$

IX. Dans l'identité (1), faisons

$$u-3v=(6a')^3,$$
$$u+3v=(6b')^3,$$

d'où

$$2u=6^3(a'^3+b'^3),$$
$$3v=6^2(b'^3-a'^3),$$

$$2u(u-3v)(u+3v)=2(u^3-9uv^2)=(a'^3+b'^3)(216a'b')^3.$$

Si a' et b' satisfont à l'équation

$$a'^3+b'^3=m\lambda^3,$$

en posant

$$a'^3=\alpha, \qquad b'^3=\beta,$$

les valeurs

$$X=\beta^3+6\alpha\beta^2+3\alpha^2\beta-\alpha^3,$$
$$Y=\alpha^3+6\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3,$$
$$Z=3a'b'\lambda(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$

sont solutions de l'équation

$$X^3+Y^3=mZ^3.$$

On a donc une seconde solution de l'équation

$$x^3+y^3=mz^3,$$

$x=a'$, $y=b'$, $z=\lambda$ étant une première solution. La méthode employée est tout à fait différente des précédentes.

X. Transformons l'identité (1) en posant

$$u = 4\alpha^3,$$
$$u + 3v = \beta^3,$$

d'où

$$u - 3v = 8\alpha^3 - \beta^3.$$

Soit

$$2\alpha = \beta + 1,$$

il vient

$$8\alpha^3 - \beta^3 = 3\beta^2 + 3\beta + 1.$$

L'identité devient

$$X^3 + Y^3 = (3\beta^2 + 3\beta + 1)Z^3$$

avec

$$Z = 2\alpha\beta(u^2 + 3v^2)$$

et l'on a

$$u = \frac{(\beta+1)^3}{2}, \qquad v = \frac{3\beta^2 + 3\beta + 1 - \beta^3}{6};$$
$$X = 3u^2v - 3v^3 + u^3 - 9uv^2,$$
$$Y = u^3 + 3v^3 - 3u^2v - 9uv^2,$$
$$Z = \beta(\beta+1)(u^2 + 3v^2).$$

En donnant à β des valeurs entières, positives ou négatives, on aura, après suppression, s'il y a lieu, d'un dénominateur commun à X, Y, Z, une solution de l'équation

$$X^3 + Y^3 = mZ^3$$

pour toutes les valeurs de m qui appartiennent à la forme

$$3\beta^2 + 3\beta + 1.$$

En donnant à β une valeur fractionnaire $\frac{a}{b}$, on aura une solution de l'équation

$$b^2x^3 + b^2y^3 = (3a^2 + 3ab + b^2)z^3.$$

Faisons, par exemple, $a = 1$, $b = 2$, nous aurons

$$4x^3 + 4y^3 = 13z^3;$$

$a = 1$, $b = 3$,

$$3x^3 + 3y^3 = 7z^3;$$

$a = -1$, $b = 3$,

$$3x^3 + 3y^3 = z^3;$$

$a = 3$, $b = -2$; on retrouve l'équation

$$4x^3 + 4y^3 = 13z^3.$$

Faisons enfin $a = 2$, $b = -3$; nous retrouvons

$$3x^3 + 3y^3 = z^3.$$

Si nous faisons $b = 8$, comme b^2 est un cube, en posant

$$4x = x',$$
$$4y = y',$$

nous aurons une solution de l'équation

$$x'^3 + y'^3 = (3a^2 + 24a + 64)z^3,$$

x' et y' devant être multiples de 4; il y aura une discussion à faire.

Il faut remarquer que l'équation

$$x^3 + y^3 = mz^3,$$

quand $m = 3\beta^2 + 3\beta + 1$, admet la solution évidente

$$x = \beta + 1,$$
$$y = -\beta,$$
$$z = 1.$$

Pour $\beta = 3$, l'équation

$$x^3 + y^3 = 37z^3$$

admet la solution

$$x = 4, \qquad y = -3, \qquad z = 1.$$

De même

$$x^3 + y^3 = 61z^3$$

admet la solution

$$x = 5, \qquad y = -4, \qquad z = 1.$$

De même

$$x^3 + y^3 = 91 z^3$$

admet la solution

$$x = 6, \qquad y = -5, \qquad z = 1.$$

La méthode que nous avons exposée permet d'obtenir une seconde solution, différente de la solution évidente.

Remarques. — 1° En donnant dans l'identité (1) à $u - 3v$, $u + 3v$, des valeurs fractionnaires, on trouve de nouvelles équations, dont on a ainsi une solution.

Prenons, par exemple,

$$u - 3v = \frac{1}{2},$$

$$u + 3v = \frac{1}{4};$$

on trouve alors l'équation

$$4x^3 + 4y^3 = 3z^3$$

et la solution

$$x = 37, \qquad y = 17, \qquad z = 42,$$

qui coïncide avec la solution

$$x = 37, \qquad y = 17, \qquad z = 21$$

de l'équation

$$x^3 + y^3 = 6z^3.$$

2° Dans le produit $2u(u - 3v)(u + 3v)$, posons

$$2u = z^3,$$
$$u - 3v = x,$$
$$u + 3v = x^2,$$

d'où

$$x^2 + x = z^3.$$

Si une pareille équation était possible, l'équation

$$X^3 + Y^3 = Z^3$$

aurait des solutions entières, et l'on sait que c'est impossible.

De même, posons

$$u - 3v = x^3 y,$$
$$u + 3v = y^2,$$
$$2u = z^3,$$

d'où

$$z^3 = y^2 + x^3 y$$

et cette équation est impossible, en vertu de ce qui précède.

On en déduit que l'équation

$$x^6 + 4z^3 = t^2$$

est, aussi, impossible.

CORRESPONDANCE.

M. **R. Bouvaist**. — *Sur la question* 546. — La solution publiée (1916, p. 469) me paraît incomplète : l'auteur admet *a priori* que les transformations dont il est question doivent conserver les points cycliques. Or la normale et la tangente en un point d'une conique sont conjuguées par rapport aux foyers réels et imaginaires de la courbe, il en résulte immédiatement que toute transformation homographique faisant correspondre aux points cycliques les foyers réels ou imagi-

naires fera correspondre, aux normales à la courbe primitive, les normales à la courbe transformée.

En ce qui concerne les quadriques il suffira de même de faire correspondre à l'ombilicale une quelconque des coniques focales.

M. **M. Faucheux**. — *Une question de Cinématique*. — Voici un exercice qui sera peut être de nature à intéresser quelques lecteurs des *Nouvelles Annales*.

Si un mobile décrit une trajectoire plane T de telle façon que l'accélération γ coupe le rayon de courbure de la développée Γ de la trajectoire dans un rapport constant, la vitesse est proportionnelle à une puissance du rayon de courbure de la trajectoire. Réciproque. *Cas particuliers*. Soient C et C_1 les centres de courbure de T et Γ, M l'intersection de CC_1 avec γ.

Si

$$CM = CC_1,$$

l'aire balayée par le rayon de courbure de la trajectoire est proportionnelle au temps.

Si

$$CM = -CC_1,$$

la tangente à la trajectoire tourne avec une vitesse angulaire constante.

Si

$$CM = \pm \frac{CC_1}{2},$$

la force vive du mobile est inversement ou directement proportionnelle au rayon de courbure de T

M. **G. Fontené**. — *Sur la question* **1704** *bis*. — La solution de cette question (lieu du centre du cercle circonscrit à un triangle ABC qui reste circonscrit à

une conique S, conjugué à une conique Σ, inscrit par suite à une conique S′) insérée en 1916, p. 474, avait été rédigée avant l'excellente solution de M. Bouvaist, p. 184, et la Note de la page 355. Je ne soupçonnais pas l'interprétation des conditions qui expriment que le lieu est un cercle, interprétation qui résulte du calcul de M. Bouvaist. Et je n'avais pas encore deviné le sens de la condition qui exprime que le lieu est une droite double.

Mais il y a autre chose. *La représentation paramétrique d'une conique qui est un lieu géométrique ne peut atteindre le cas où le lieu dégénère en un système de deux droites distinctes ; elle peut atteindre le cas où le lieu se réduit à une droite double*, et *aussi le cas où le lieu se réduit à une droite accompagnée de la droite à l'infini du plan*. Je ne pouvais donc, par la méthode employée, atteindre le cas où le lieu se compose de deux droites, d'ailleurs imaginaires ; mais j'aurais dû, en outre du cas où le lieu est une droite double, rencontrer le cas où le lieu se réduit à une droite, plus la droite à l'infini. La forme un peu trop particulière donnée à l'équation $\lambda\varphi(t) + \psi(t) = 0$, au bas de la page 475, m'en a empêché. On doit prendre cette équation sous la forme

$$(1)\qquad [(A\lambda + B)t - (C\lambda + D)](t^2 + 1) + M\lambda t - 1 = 0,$$

sans faire $M = 1$, et l'on trouve alors, pour les coordonnées d'un point du lieu,

$$x = -\frac{c^2}{a}\,\frac{AM\lambda^2 + (BM + C)\lambda + D + 1}{M^2\lambda^2 + 1},$$

$$y = -\frac{c^2}{b}\,\frac{CM\gamma^2 + (DM - A)\lambda - B}{M^2\lambda^2 + 1},$$

avec le facteur M commun aux trois coefficients de λ^2.

Si M tend vers zéro, le lieu tend à se réduire à une droite, plus la droite à l'infini. Or, avec $M = 0$, si l'on fait λ infini, deux des trois valeurs de t données par l'équation (1) sont i et $-i$, l'un des trois côtés du triangle ABC correspondant est rejeté à l'infini, la conique S est une parabole; c'est le cas 2° de la page 356.

J'ajoute que, d'une manière générale, les formules

$$\frac{x}{a\lambda^2+b\lambda+c} = \frac{y}{a'\lambda^2+b'\lambda+c'} = \frac{1}{a''\lambda^2+b''\lambda+c''}$$

représentent une droite double si l'on a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire si les racines des trois trinomes en λ sont en involution [1]; deux valeurs α et β du paramètre λ donnent un même point si elles se correspondent dans cette involution; si l'on pose $\theta = \alpha + \beta$, on peut écrire

$$\frac{x}{a\theta+b} = \frac{y}{a'\theta+b'} = \frac{1}{a''\theta+b''}.$$

On peut écrire encore

$$\frac{x}{m\mathrm{F}(\lambda)+nf(\lambda)} = \frac{y}{\mathrm{F}(\lambda)} = \frac{1}{f(\lambda)},$$

ou

$$\frac{x}{m\dfrac{\mathrm{F}}{f}+n} = \frac{y}{\dfrac{\mathrm{F}}{f}} = 1;$$

on reconnaît une représentation impropre de la droite,

(1) Cette relation serait encore satisfaite si les trois trinomes en λ avaient une racine commune.

et il y a involution entre les deux valeurs de λ qui donnent un même point.

M. **R. Goormaghtigh.** — *Sur la parabole tangente à quatre droites* [1]. — L'équation (6) de la Note de M. Barisien à ce sujet (1916, p. 455) ne donne pas *trois* valeurs pour φ mais *une seule*, comme l'exigent les conditions du problème géométrique. Si l'on multiplie les éléments de la première colonne par $\sin\varphi$ et ceux de la seconde par $\cos\varphi$ et qu'on les ajoute, que d'autre part on multiplie ceux de la première colonne par $\cos\varphi$ et ceux de la seconde par $\sin\varphi$ et qu'on les retranche, on trouve l'équation

$$| m_i \quad 1 - m_i^2 \quad p_i(\sin\varphi - m_i\cos\varphi) \quad 1 + m_i^2 | = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

ou

$$| p_i(\operatorname{tang}\varphi - m_i) \quad m_i \quad 1 - m_i^2 \quad 1 | = 0;$$

on en déduit facilement, en développant le déterminant, la valeur de $\operatorname{tang}\varphi$.

M. **R. Goormaghtigh.** — *Sur les centres de courbure aux points correspondants de deux courbes polaires réciproques.* — La solution du problème traité par M. Balitrand (1916, p. 461) résulte immédiatement de deux constructions bien connues, si l'on remarque que la polaire réciproque (M_1) de (M) par rapport à un cercle de centre O est l'inverse de la podaire de (M) par rapport à O. En conservant les notations de la figure (p. 461), on aura donc cette construction simple :

---

[1] La Rédaction, sur le même sujet, a reçu plusieurs Notes analogues, notamment de MM. Egan, Ser et d'*un Anonyme*.

On projette C *en* C′ *sur* OM, *puis* C′ *en* C″ *sur* MC; *la droite* OC″ *passe au centre de courbure* C_1 *cherché.*

Il est facile d'en déduire d'une part les constructions données par M. Balitrand et d'autre part, au moyen de la considération des triangles semblables OMC″, $C_1 M_1 O$, la formule $\rho\rho' \sin^3 V = a^2$ de M. Chemin.

M. **M. d'Ocagne**. — *Sur le rayon de courbure de la polaire réciproque.* — La formule attribuée à M. Chemin par M. Balitrand dans une Note récente sur ce sujet (*Nouvelles Annales*, 1916, p. 461) est due à Mannheim (*Journal de Liouville*, 1866, p. 193). Je l'ai déduite à mon tour (*Annales de l'École Normale*, 1887, p. 313) d'une autre relation obtenue d'une façon tellement simple que je crois devoir la rappeler ici.

Si $d\theta$ et $d\theta_1$ sont les angles infiniment petits dont tournent les tangentes en M et en M_1 aux courbes polaires réciproques, OM_1 et OM, respectivement perpendiculaires à ces tangentes, tournent des mêmes angles. Si donc N et N_1 sont les extrémités des sous-normales polaires correspondant à M et M_1, pour lesquels C et C_1 sont les centres de courbure, on a pour les différentielles des arcs décrits par M et M_1,

$$ds = MC.d\theta = MN.d\theta_1,$$
$$ds_1 = M_1C_1.d\theta_1 = M_1N_1.d\theta,$$

d'où

$$\frac{MC}{MN} = \frac{M_1N_1}{M_1C_1}.$$

Telle est la relation que j'avais obtenue, facile à traduire en construction géométrique, et d'où, comme je l'ai fait voir, se déduit immédiatement celle de Mannheim.

Dans la même Note, ci-dessus rappelée, j'ai établi les relations analogues correspondant aux cas où les polaires réciproques sont prises non plus par rapport à un cercle, mais par rapport soit à une conique à centre quelconque, soit à une parabole.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1832.

(1899, p. 579.)

I. *Si l'on considère les triangles* T *inscrits à une conique* A *et circonscrits à une conique* B, *le lieu des centres des cercles* Σ *qui leur sont circonscrits est une conique* C.

II. *Il existe un point du plan ayant même puissance par rapport à tous les cercles* Σ; *ce point se détermine comme il suit : deux des triangles* T *ont un sommet à l'infini; les deux côtés opposés respectivement à ces sommets se coupent au point cherché* P.

III. *D'après cela, l'enveloppe des cercles* Σ *est une anallagmatique du quatrième ordre ayant le point* P *pour pôle et la conique* C *pour déférente; pour que cette courbe se décompose en deux cercles, il faut et il suffit que les deux foyers* [1] *de la conique* B *soient situés sur la conique* A.

IV. *Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que tous les cercles* Σ *passent par le point* P.

G. HUMBERT.

---

[1] Les deux foyers réels ou les deux foyers imaginaires.

SOLUTION
Par M. G. FONTENÉ.
(Avec une Note de M. G. HUMBERT.)

En 1900, sans connaître la question précédente, j'ai donné (dans la *Revue de Mathématiques spéciales*) *le lieu du centre* O *du cercle* Σ, *le lieu du centre de gravité* G *du triangle*, *le lieu de l'orthocentre* H, *le lieu du centre* Ω *du cercle des neuf points; tous ces lieux sont des coniques.*

1. Lorsque deux coniques S_0 et S_2 admettent des triangles ABC circonscrits à S_0 et inscrits à S_2, les racines de l'équation en λ pour la forme $\lambda S_0 + S_2$ doivent satisfaire à l'une des relations

$$\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{\lambda'} \pm \sqrt{\lambda''} = 0;$$

la conique S_0, et l'une des quatre coniques par rapport auxquelles S_0 et S_2 sont polaires réciproques, admettent alors des triangles circonscrits à S_0 et conjugués à cette conique S_1 : ce sont les triangles ABC. J'ai donc pu considérer un triangle ABC circonscrit à une conique S_0, *conjugué à une conique* S_1, inscrit par suite à une conique S_2. Les coniques S_1 et S_2 étant d'abord quelconques, soient

$$f(x, y) = 0, \qquad Ax^2 + By^2 + C = 0$$

leurs équations, avec des axes rectangulaires.

En partant des coordonnées homogènes d'un point A de la conique S_2, lesquelles sont exprimables par des polynomes du second degré en t, si la polaire du point A par rapport à la conique S_1 coupe la conique S_2 aux points B et C, on trouve facilement pour les coordonnées du centre O du cercle ABC

$$x_0 = \frac{P}{R}, \qquad y_0 = \frac{Q}{R},$$

P, Q, R étant des polynomes du sixième degré en t; les points O situés sur une droite donnée correspondent à des valeurs de t en nombre égal à 6. Si maintenant les deux coniques S_1 et S_2 satisfont à la relation invariante qui donne un nombre infini de triangles ABC inscrits à S_2 et conjugués à S_1, un même point O correspond aux trois valeurs de t qui

donnent les sommets d'un même triangle ABC, il n'y a plus que deux points O sur une droite donnée, et le lieu du point O est une conique. On se rend bien compte après coup de ce qui se passe. On a pour le point O

$$\frac{x_0}{a\lambda^2+\ldots} = \frac{y_0}{a'\lambda^2+\ldots} = \frac{1}{a''\lambda^2+\ldots};$$

les trois t d'un triangle ABC sont liés au λ du point O par une relation de la forme

$$\varphi_3(t)+\lambda\psi_3(t)=0;$$

on a donc

$$\frac{x_0}{P_6(t)} = \frac{y_0}{Q_6(t)} = \frac{1}{R_6(t)}.$$

2. On trouve de même pour le point G

$$x_1 = \frac{P'}{R}, \qquad y_1 = \frac{Q'}{R},$$

P', Q', R étant des polynomes du sixième degré en t. Le lieu du point G est une conique, homothétique à S^2 puisque les points à l'infini sont les mêmes.

3. Le lieu du point H a été donné par M. Burnside; une démonstration par les invariants se trouve dans le *Traité des sections coniques* de Salmon; une démonstration en partie géométrique a été donnée par P. Serret dans les *Nouvelles annales*, 1865, p. 157.

L'équation du lieu est, en rapportant la figure aux axes de la conique S_2,

$$\left(\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-1\right):\left(\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}\right)$$
$$-[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(a^2+b^2)]=0;$$

le lieu est une conique appartenant au faisceau ponctuel déterminé par la conique S_2 *et par le cercle orthoptique de la conique* S_0, *et semblable à la conique* S_2, *ce qui entraîne la perpendicularité des axes homologues des deux coniques.* La conique S_0 n'intervient que par son cercle orthoptique. Nous montrerons simplement que le lieu est une

conique; les asymptotes de cette conique sont d'ailleurs évidemment perpendiculaires à celles de S_2.

Les dénominateurs des formules qui donnent les coordonnées des points O et G sont identiques : cela tient à ce que ces points sont simultanément rejetés à l'infini. Or, sur la droite OG, droite d'Euler du triangle ABC, les points H et Ω sont donnés par les relations

$$\frac{\overline{HG}}{\overline{HO}} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{\overline{\Omega G}}{\overline{\Omega O}} = \frac{1}{3},$$

de sorte que les coordonnées de ces points sont données par des formules analogues aux formules ci-dessus; ces points décrivent donc des coniques.

Il résulte d'un théorème général dû à M. Humbert (*Bulletin de la Société mathématique*, 1899) que le point G est fixe si la conique S_0 touche les asymptotes de la conique S_2 : d'une manière générale, une tangente commune aux deux coniques S_0 et S_2 touche la conique en un point $B = C$, et la seconde tangente menée de ce point à la conique S_0 la touche en un point A situé sur S_2, de sorte qu'on obtient un triangle évanouissant ABC, avec deux sommets B et C confondus, deux côtés AB et AC confondus; si deux des quatre tangentes communes sont les asymptotes de S_2, en sorte que deux des quatre sommets doubles $B = C$ sont à l'infini, le point G est fixe. (La conique qui est ordinairement le lieu du point G est ici formée de deux droites parallèles aux asymptotes de S_2; sauf pour les deux triangles qui ont un sommet double à l'infini, le point G est au point de rencontre de ces deux droites). En particulier, si S_2 est un cercle et si S_0 est une conique ayant un foyer au centre O de ce cercle, les points O, G, H, Ω sont les mêmes pour tous les triangles ABC; ces triangles sont ceux, bien connus, qui sont inscrits à un cercle S_2 et dont l'orthocentre occupe une position.

4. *L'enveloppe des cercles* (O) *circonscrits aux triangles* ABC *et l'enveloppe des cercles* (H) *conjugués à ces triangles sont des anallagmatiques du quatrième ordre.* — Le cercle (O) circonscrit au triangle ABC est orthogonal au cercle orthoptique de la conique S_2 (théorème de Faure); comme son centre décrit une conique, il a pour

enveloppe une anallagmatique du quatrième ordre. Lorsque la conique S_1 est une hyperbole équilatère, les cercles (O) passent au centre de cette hyperbole. Lorsque la conique S_1 est une parabole, les cercles (O) ont leurs centres sur la directrice : il sont orthogonaux à cette droite. Le cercle (H) conjugué au triangle ABC est orthogonal au cercle orthoptique de la conique S_0 (théorème de Steiner): comme son centre décrit une conique, il a pour enveloppe une anallagmatique du quatrième ordre. Lorsque la conique S_0 est une hyperbole équilatère, les cercles (H) passent au centre de cette hyperbole. Lorsque la conique S_0 est une parabole, les cercles (H) ont leurs centres sur la directrice : ils sont orthogonaux à cette droite; le lieu trouvé dans le cas général se décompose en la directrice et la droite à l'infini. [Dans ce même cas, les cercles (O) passent au foyer de la parabole.]

5. En ce qui concerne la décomposition de l'enveloppe des cercles (O), voici la solution que m'a indiquée M. G. Humbert.

Si une anallagmatique du quatrième ordre se décompose en deux circonférences, les seize foyers sont les deux points communs à celles-ci et les centres des deux cercles de rayon nul qui passent par ces deux points, chacun des quatre foyers ainsi obtenus étant compté quatre fois. Or, dans chaque génération de l'anallagmatique, les quatre foyers qui correspondent à cette génération sont les points communs à la conique déférente et à la circonférence directrice. Si l'anallagmatique se décompose en deux circonférences, il faut que la conique déférente et la circonférence directrice soient bitangentes. On voit d'ailleurs directement que, s'il en est ainsi, l'anallagmatique se décompose.

Dans le cas du problème, il faut exprimer que la conique qui forme le lieu du point O et la circonférence directrice (circonférence orthoptique de la conique S_1) sont bitangentes, ou encore que les quatre foyers de l'anallagmatique correspondant à cette génération sont deux à deux confondus.

Cherchons donc, parmi les cercles circonscrits aux triangles considérés (triangles circonscrits à S_0 et inscrits à S_2), ceux qui sont de rayon nul. L'un des côtés AB du triangle ABC doit être une isotrope, une tangente menée du point cyclique I, par exemple, à la conique S_0, et le centre du cercle ABC est à l'intersection de cette tangente avec l'isotrope JC. Ce même

centre sera fourni par une tangente menée de J à S_0 si la droite JC se confond avec le côté CB du triangle, et cela aura lieu si le sommet B est un foyer de S_0. On voit ainsi que deux foyers opposés de S_0, foyers réels ou foyers imaginaires, doivent être situés sur S_2. Ces conditions sont suffisantes.

1834 (1).

(1900, p. 95.)

Étant données deux coniques S *et* S', *trouver le lieu d'un point* P *tel que l'on puisse mener de ce point une tangente à* S *et une tangente à* S' *perpendiculaires entre elles.*

Montrer que ce lieu est une courbe C_8 *du huitième ordre et du premier genre ayant les points cycliques pour points quadruples et huit points doubles à distance finie. On déterminera la position de ces derniers en montrant que ce sont les points communs à distance finie à trois courbes du quatrième ordre, dont on formera les équations. On établira que les points multiples de* C_8 *et les foyers réels et imaginaires des deux coniques* S *et* S' *sont sur une même courbe* C_3 *du troisième ordre, qui dégénère en une hyperbole équilatère et la droite à l'infini, lorsque* S *et* S' *sont concentriques. On donnera une définition géométrique de cette courbe* C_3. *Le lieu cherché* C_8 *est tangent en huit points à chacune des coniques données; les seize points de contact sont sur une même courbe du quatrième ordre.*

Exprimer les coordonnées d'un point du lieu en fonction d'un paramètre.

Examiner les cas particuliers où l'une des coniques données se réduit à une parabole ou à un couple de droites.

J. Franel.

DEUXIÈME SOLUTION

Par M. M.-F. Egan.

Mettons $X + iY = x$, $X - iY = y$, X et Y étant des coordonnées cartésiennes rectangulaires. Soit

$$ux + vy + w = 0 \tag{1}$$

(1) Voir *Nouvelles Annales*, 1915, p. 474.

l'équation de la droite (u, v, w), et soit

$$(2) \qquad au^2 + bv^2 + cw^2 + 2fvw + 2gwu + 2huv = 0$$

l'équation de la conique S. Désignons par A, B, ... les mineurs du discriminant Δ de S, et par a', A', ..., Δ' les éléments correspondants pour S'.

Si la tangente $(1, -\lambda, \mu)$ à S et la tangente perpendiculaire $(1, \lambda, \mu')$ à S' se coupent au point P (x, y), on a

$$(3) \qquad x - \lambda y + \mu = 0, \qquad \ldots,$$

$$(4) \qquad c\mu^2 + 2\mu(g - \lambda f) + a - 2h\lambda + b\lambda^2 = 0, \qquad \ldots,$$

et deux équations analogues. Les coordonnées x et y sont donc des fonctions rationnelles de λ, μ, μ'. Or μ et μ' s'expriment rationnellement en fonction de

$$\lambda, \quad \sqrt{(A\lambda^2 + 2H\lambda + B)}, \quad \sqrt{(A'\lambda^2 - 2H'\lambda + B')};$$

la courbe Γ, lieu du point P, est donc de genre 1 dans le cas où S et S' sont quelconques, et les coordonnées x, y s'exprimeront par des fonctions elliptiques d'un paramètre t.

La courbe Γ sera rationnelle si l'une des fonctions sous la racine (soit par exemple la première) est un carré parfait, ce qui arrive lorsque S est une parabole ou dégénère en un couple de points. Γ sera rationnelle aussi si les deux fonctions ont une racine commune, c'est-à-dire si une asymptote de S est perpendiculaire à une asymptote de S'.

Les valeurs de λ répondant aux deux tangentes à S menées par le point P sont données par l'équation

$$(5) \qquad \eta\lambda^2 - 2\sigma\lambda + \xi = 0,$$

en écrivant

$$\xi = cx^2 - 2gx + a, \qquad \eta = cy^2 - 2fy + b,$$
$$\sigma = cxy - fx - gy + h.$$

Notons que $\xi = 0$ et $\eta = 0$ sont les équations des couples de tangentes à S passant par l'un et l'autre des points isotropes, et que $\sigma = 0$ est celle du cercle orthoptique de S.

On trouve l'équation du lieu de P en éliminant λ entre (5) et

$$\eta'\lambda^2 + 2\sigma'\lambda + \xi' = 0.$$

Le résultat de l'élimination peut s'écrire sous deux formes équivalentes

$$(\Gamma)\ \begin{cases} (6) & (\xi'\eta - \xi'\eta)^2 + 4(\sigma\eta' + \sigma'\eta)(\sigma\xi' + \sigma'\xi) = 0, \\ (6\,a) & 4(\xi\eta - \sigma^2)(\xi'\eta' - \sigma'^2) - (\xi\eta' + \xi'\eta + 2\sigma\sigma')^2 = 0. \end{cases}$$

Le degré de cette équation est 8. Il s'abaisse à 6 quand S est une parabole ($c = 0$), et à 4 quand S' l'est aussi ($c = c' = 0$). Si S dégénère en deux points, il est visible que Γ se décompose en deux quartiques, dont chacune est la podaire de S' par rapport à un point, donc l'inverse d'une conique.

Si $\xi\eta - \sigma^2$, l'équation (5) a ses racines égales; donc $\xi\eta - \sigma^2 = 0$ est l'équation ponctuelle de S, ce qu'il est facile de vérifier directement. L'équation (6 a) montre alors que le lieu de P est tangent à S et S' aux points où celles-ci rencontrent la quartique bicirculaire

$$(\mathrm{T}) \qquad \xi\eta' + \xi'\eta + 2\sigma\sigma' = 0.$$

Au point cyclique I ($x = z = 0$), les ordres de ξ, η, σ sont respectivement 2, 0, 1. Ce point est donc un point quadruple sur Γ, ainsi que le point J ($y = z = 0$).

Mettons l'origine à un point à distance finie où l'on a

$$\xi : \eta = \xi' : \eta' = -\sigma : \sigma'.$$

Les fonctions

$$\xi\eta' - \xi'\eta = C_3, \qquad \sigma\xi' + \sigma'\xi = Q, \qquad \sigma\eta' + \sigma'\eta = Q'$$

s'annulent à l'origine. D'après l'équation (6), ce point est donc un point double sur Γ. Il est facile de voir que le nombre des points communs à $C_3 = 0$, $Q = 0$, $Q' = 0$ à distance finie est 8. Le nombre effectif des points doubles de Γ étant 20, on les a tous ainsi.

Remarquons que, ξ, η et ξ', η' étant des imaginaires conjugués, les courbes $Q + Q' = 0$, $Q - Q' = 0$ sont des quartiques réelles. C_3 est une cubique circulaire, les termes du quatrième degré dans son équation s'annulant.

C_3 est le lieu des foyers des coniques du faisceau tangentiel (S, S'). En effet, à un foyer de $S + kS' = 0$, on a

$$\xi + k\xi' = 0, \qquad \eta + k\eta' = 0,$$

donc $C_3 = 0$, et inversement. Voici une autre forme géométrique qu'on peut donner à la définition de C_3. Le faisceau involutif des tangentes menées par un point M aux coniques du faisceau (S, S') a pour droites doubles les tangentes en M aux deux coniques du système qui y passent. Pour que ces deux droites soient les bissectrices de l'angle entre tout couple de tangentes conjuguées, il faut et il suffit que le faisceau de droites admette comme couple conjugué les droites isotropes issues de M, donc que M soit le foyer d'une conique du système. C_3 est donc le lieu d'un point M tel que les couples de tangentes menées par M aux coniques du faisceau (S, S') aient les mêmes bissectrices.

Il est facile de vérifier par son équation que C_3 dégénère en un cercle si S et S' sont des paraboles, et en une hyperbole équilatère si S et S' sont concentriques. (Dans ce dernier cas, prenons le centre pour origine; alors f, f', g, g' s'annulent.)

Lorsque S est une parabole, ξ, η, σ sont linéaires, C_3, Q, Q' sont des cubiques ayant sept points communs, qui sont des points doubles de Γ. Si l'on écrit l'équation de S sous la forme

$$2vw + 2wu + 2huv = 0,$$

l'équation (6 a) montre que le point $x + y = 0$, $z = 0$, c'est-à-dire le point à l'infini sur la directrice de S, est aussi un point double de Γ. Γ étant une sextique rationnelle bicirculaire, on a ainsi ses dix points doubles.

Si S' est aussi une parabole, Γ est une quartique rationnelle non circulaire, ayant pour points doubles les trois points communs au cercle C_3 et aux coniques Q, Q'.

Si les coniques S et S' sont homofocales, leurs équations diffèrent par les seuls coefficients h et h'; on a donc $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$, et l'équation (6) se réduit à

$$\xi^2 \eta^2 (\sigma + \sigma')^2 = 0,$$

d'où le théorème bien connu.

Quant aux contacts de Γ avec S et S', il suffit de remarquer que la courbe T se réduit à une cubique si S est une parabole et à une conique si S et S' sont toutes les deux des paraboles.

En modifiant légèrement l'analyse qui précède, on trouve l'enveloppe γ de la droite d joignant les points de contact de

deux tangentes, à S et à S′, perpendiculaires entre elles. Voici quelques propriétés de cette courbe :

La courbe γ est de la huitième classe et du même genre (1 ou 0, suivant le cas) que Γ. *Elle touche* S *et* S′ *chacune en huit points; les tangentes en ces seize points touchent une courbe τ de la quatrième classe. Les huit tangentes menées à τ par les centres* S *et* S′ *sont des tangentes doubles de γ. Les douze tangentes doubles de* Γ *qui restent sont les tangentes communes à trois courbes données de la quatrième classe.*

En effet, soit (u, v, w) la droite d dont on cherche l'enveloppe. Écrivons

$$S_1 = au + hv + gw, \qquad S_2 = hu + bv + fw,$$
$$S_3 = gu + fv + cw.$$

Puisque d passe par le point de contact de $(1, -\lambda, \mu)$ avec S et de $(1, \lambda, \mu')$ avec S′, on a

$$S_1 - \lambda S_2 + \mu S_3 = 0,$$
$$S'_1 + \lambda S'_2 + \mu' S'_3 = 0;$$

donc u, w et $v : w$ sont des fonctions rationnelles de λ, μ, μ'. Cela suffit à déterminer le genre de γ.

On a aussi, comme auparavant,

$$\Phi\lambda^2 - 2\Sigma\lambda + \Theta = 0,$$
$$\Phi'\lambda^2 + 2\Sigma'\lambda + \Theta' = 0,$$

où l'on a mis

$$\Theta = cS_1^2 - 2gS_1S_3 + aS_3^2 = BS - \Delta v^2,$$
$$\Phi = cS_2^2 - 2fS_2S_3 + bS_3^2 = AS - \Delta u^2,$$
$$\Sigma = cS_1S_2 - fS_1S_3 - gS_2S_3 + hS_3^2 = -HS + \Delta uv.$$

$\Theta = 0$ et $\Phi = 0$ donnent les points de contact des couples de tangentes à S issus des points cycliques $v = 0$ et $u = 0$. Σ est une conique homofocale à S (polaire réciproque par rapport à S de son cercle orthoptique σ). On vérifie aussi que

$$\Theta\varphi - \Sigma^2 = \Delta S(gu + fv + cw)^2.$$

L'équation de γ s'écrit donc sous les deux formes équivalentes ($\alpha = 0$ et $\alpha' = 0$ étant les équations des centres de S et S')

$$4\Delta\Delta' SS' \alpha^2 \alpha'^2 = (\Theta\varphi' + \Theta'\varphi + 2\Sigma\Sigma')^2 = 0,$$
$$(\Theta\varphi' - \Theta'\varphi)^2 + 4(\varphi\Sigma' + \varphi'\Sigma)(\Theta\Sigma' + \Theta'\Sigma) = 0;$$

d'où les propriétés énoncées.

La courbe (ε) $\Theta\varphi' - \Theta'\varphi = 0$, qui remplace ici la courbe C_3, est de la quatrième classe. Ses foyers réels sont ceux des deux coniques. Les droites pour lesquelles on a

$$\Theta : \Theta' = \varphi : \varphi' = -\Sigma : \Sigma'$$

sont des tangentes doubles de γ. Ces droites sont au nombre de douze; on connaît donc ainsi les vingt tangentes doubles de γ.

1864.

(1900, p. 384.)

Étant donnés, sur une conique S', *deux couples de points fixes* A, B *et* C, D, *si deux points* M *et* N *de la conique ont une correspondance doublement quadratique et symétrique exprimés par la relation*

$$\frac{1 + (\text{ABMN})}{1 - (\text{ABMN})} \times \frac{1 + (\text{CDMN})}{1 - (\text{CDMN})} = -\frac{1 + (\text{ABCD})}{1 - (\text{ABCD})},$$

où les parenthèses désignent des rapports anharmoniques, la corde MN *est un côté d'un contour quadrangulaire variable* MNPQ *circonscrit à une conique fixe* S *et inscrit à la conique* S'. G. Fontené.

Solution
Par l'Auteur.

La relation qui lie M et N établit entre ces points une correspondance doublement quadratique et symétrique; il en résulte que la corde MN a pour enveloppe une courbe de seconde classe, une conique S. Il faut montrer que les deux coniques S' et S admettent en nombre infini des contours quadrangulaires inscrits à S' et circoncrits à S, et pour cela il suffit de montrer qu'elles admettent *un* tel contour.

Observons d'abord que, si l'on met M en A, l'une des deux positions de N est aussi en A; un fait analogue a lieu quand

on met M en B, ou en C, ou en D; la conique S, enveloppe de la corde MN, est donc inscrite au quadrilatère formé par les tangentes à la conique S′ aux quatre points A, B, C, D, ou encore, les tangentes communes aux deux coniques touchant la conique S′ aux points A, B, C, D.

Le polygone de Poncelet ayant ici un nombre pair de côtés, s'il existe, on aura deux sortes de polygones repliés : dans les uns, deux sommets seront confondus au point de contact avec S′ d'une tangente commune aux deux coniques, les deux autres sommets étant également confondus au point de contact avec S′ d'une tangente commune, et la droite qui joint les deux points de contact devra être tangente à la conique S; les deux autres contacts repliés jouiront de propriétés corrélatives des précédentes. Un polygone replié de la première espèce existera si la droite CD (on pourrait aussi bien prendre AB) est tangente à la conique S, c'est-à-dire si les points C et D forment un couple M, N vérifiant la relation donnée; or c'est bien ce qui a lieu, avec la relation de l'énoncé, si l'écriture (A, B, C, D) représente le rapport anharmonique $\frac{CB}{CA} : \frac{DB}{DA}$; il aurait mieux valu supprimer le signe — au second membre, en prenant comme l'on fait d'ordinaire $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$.

1876.

(1900, p. 571.)

Pour quelles valeurs de x_1, x_2 la somme

$$\frac{1}{x_1(n-1)+x_2}+\frac{1}{x_1(n-2)+2x_2}+\ldots+\frac{1}{x_1+(n-1)x_2}$$

a-t-elle une limite, quand n grandit indéfiniment?

Calculer cette limite. E. Weill.

Solution
Par un Abonné.

Lorsque $x_2 = x_1$, chaque terme se réduit à $\frac{1}{nx_1}$, et la limite de la somme est évidemment $\frac{1}{x_1}$.

Si x_1 et x_2 sont différents, soit $x_1 < x_2$; le terme général,

de rang p, peut s'écrire

$$\frac{1}{x_1(n-p)+px_2} = \frac{1}{nx_1+p(x_2-x_1)}.$$

Posons

$$n\,dx = x_2 - x_1, \qquad p\,dx = x - x_1;$$

l'expression du terme général devient $\frac{dx}{(x_2-x_1)x}$ et la somme cherchée est

$$\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x} = \frac{lx_2 - lx_1}{x_2-x_1}.$$

Cette expression ne prend une valeur bien déterminée que si x_1 et x_2 sont de même signe. Quand ils sont négatifs, il suffit évidemment de changer le signe du résultat obtenu pour $+x_1$, $+x_2$.

On vérifie sans peine que, pour $x_2 = x_1$, on retrouve $\frac{1}{x_1}$ comme somme.

1880.

(1900, p. 571.)

Les intersections des plans principaux d'une quadrique avec la normale en un point M *de cette quadrique déterminent trois régions sur cette normale. La région qui comprend le point* M *ne contient aucun des centres de courbure principaux correspondant à ce point* M. *Pour un point* P *de cette région*, PM *est la plus courte distance du point* P *à la quadrique, si celle-ci n'est pas un ellipsoïde. Dans le cas d'un ellipsoïde, la région contenant le point* M *se compose de deux segments infinis; pour un point* P *situé dans le même segment que* M, PM *est la plus courte distance; pour un point* P *situé dans l'autre segment*, PM *est la plus grande distance. Pour les points* P *situés dans les autres régions de la normale*, PM *n'est ni la plus petite, ni la plus grande des normales menées du point* P *à la quadrique.* A. Pellet.

Solution
Par l'auteur.

Considérons le cas de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \qquad (a^2>b^2>c^2).$$

Soit P un de ses points, non situé dans un des plans principaux, de coordonnées x, y, z. On a, pour les équations de la normale en ce point,

$$\frac{X-x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{Y-y}{\frac{y}{b^2}} = \frac{Z-z}{\frac{z}{c^2}} = \rho,$$

ρ est la distance du point M (X, Y, Z) au point P multipliée par $p = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}$, distance du centre au plan tangent en P. Pour $\rho = -c^2$, le point correspondant M_1 est situé dans le plan $z=0$; pour $\rho < -c^2$, M_1 est compris entre M et P, et, si l'on désigne par P′ le symétrique de P par rapport au plan $z=0$, on a

$$M_1P = M_1P', \qquad MP = MM_1 + M_1P = MM_1 + M_1P' > MP',$$

puisque MM_1P' forme un triangle. Pour $\rho = -a^2$, le point correspondant M_2 est situé dans le plan $x=0$; on a, pour les points M correspondant à $\rho > -a^2$,

$$M_2P = M_2P'', \qquad MP = M_2P - M_2M = M_2P'' - M_2M < MP'',$$

P″ étant le symétrique de P par rapport au plan $x=0$. Ainsi, lorsque ρ est compris entre $-c^2$ et $-a^2$, par suite M entre M_1 et M_2, MP est compris entre MP″ et MP′, et ne peut être la plus grande ou la plus petite distance du point M à l'ellipsoïde.

Cette région de la normale M_1M_2 contient les centres de courbure des sections principales de l'ellipsoïde au point P, qui correspondent aux valeurs de ρ racines de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2(a^2+\rho)} + \frac{y^2}{b^2(b^2+\rho)} + \frac{z^2}{c^2(c^2+\rho)} = 0.$$

Pour M voisin de P, MP est la plus courte distance à l'ellipsoïde, et MQ étant une autre normale de pied Q, on a

$$MQ > MP;$$

cette inégalité subsiste lorsque ρ varie entre $-c^2$ et $+2\rho+\infty$, tant que MQ est réel puisque l'égalité ne peut avoir lieu dans

cet intervalle. Si, pour un point M′ situé dans cette région et sur la développée de l'ellipsoïde, M′Q′ devient réel, M′ est un centre de courbure pour le point Q′ et, d'après la remarque faite, M′Q′ ne pouvant être plus courte distance, on a

$$M'Q' > M'P.$$

Ainsi MP est la plus courte distance du point M à l'ellipsoïde pour $\rho > -c^2$. On verrait de même que MP est la plus grande distance pour $\rho < -a^2$.

Les cas de l'hyperboloïde et du paraboloïde se traiteraient de la même manière.

QUESTIONS.

2306. Soient OA et OB deux tangentes rectangulaires d'une hypocycloïde à trois rebroussements (H_3). Une conique quelconque qui touche OA et OB a, avec (H_3), quatre autres tangentes communes. La parabole qui les touche a pour foyer le symétrique de O par rapport au centre de la conique et son axe est parallèle à la tangente à (H_3) issue de O.

F. Balitrand.

2307. On considère une conique quelconque tangente en un point O à une hypocycloïde à trois rebroussements (H_3). Elle a avec (H_3) quatre autres tangentes communes. La parabole qui les touche a pour foyer le symétrique de O par rapport au centre de la conique et son axe est parallèle à la tangente à (H_3) issue de O. F. Balitrand.

2308. Soient M un point d'une hypocycloïde à trois rebrous sements H_3 et O le centre de son cercle tritangent. On mène à la courbe la tangente MT issue de M et l'on joint MO. Démontrer que les angles θ et ω, que font avec la tangente

en M les droites MT et MO, sont liés par la relation

$$\tang \theta = 3 \tang \omega.$$

F. Balitrand.

2309 D'un point P on mène à une hypocycloïde à trois rebroussements les trois tangentes dont les points de contact sont A, B, C. Démontrer que le cercle circonscrit au triangle PAB, par exemple, admet pour tangente en P la conjuguée harmonique de PC par rapport à PA et PB.

F. Balitrand.

2310. On considère une tangente fixe d'une hypocycloïde à trois rebroussements. Démontrer que les couples de tangentes rectangulaires à l'hypocycloïde déterminent sur cette tangente fixe des segments qui ont tous même point milieu.

F. Balitrand.

2311. Soient OA et OB, PC et PD deux couples de tangentes rectangulaires d'une hypocycloïde à trois rebroussements; A et B, C et D étant les points de contact de ces tangentes; démontrer qu'il existe une hyperbole équilatère circonscrite au triangle OAB et ayant pour asymptotes les droites PC et PD. F. Balitrand.

2312. Soient C une courbe gauche et C_1 la courbe, lieu des centres des sphères osculatrices à C. Si l'on désigne par R le rayon de courbure de C en l'un de ses points, par ρ le rayon de la sphère osculatrice au même point, par R_1 le rayon de C_1 au point correspondant, on a, si R n'est pas constant,

$$(a) \qquad R_1 = \left| \frac{\rho \, d\rho}{dR} \right|.$$

Si R est constant, on a

$$(b) \qquad R_1 = \rho = R.$$

R Bricard.

[H1]

SUR L'ÉLIMINATION ENTRE ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

Par M. HADAMARD.

L'intégration d'un système de p équations différentielles ordinaires à p fonctions inconnues d'une variable x,

$$(1)\quad F_1\left(x, \xi, \eta, \ldots, \frac{d\xi}{dx}, \frac{d\eta}{dx}, \ldots, \frac{d^h\xi}{dx^h}, \frac{d^k\eta}{dx^k}, \ldots\right) = 0,$$
$$F_3 = 0, \quad \ldots, \quad F_p = 0,$$

peut, *en général*, se ramener à celle d'une seule équation, d'ordre égal à la somme des ordres auxquels $\xi, \eta, \ldots$ figurent dans le système donné, l'inconnue unique, ξ par exemple, qui figure dans cette équation, fournissant (en général) toutes les autres par des dérivations et des opérations algébriques.

Mais des cas exceptionnels peuvent se présenter.

La méthode théorique suivante, que j'ai été conduit à indiquer dans mon enseignement à l'École Polytechnique, permet de discuter ce qui peut se passer dans tous les cas possibles.

On sait, tout d'abord, que le système (1) peut se ramener à un système canonique d'équations du premier ordre. Partons donc du système

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \varphi_1(x, y, z, u, \ldots), \\ \dfrac{dz}{dx} = \varphi_2(x, y, z, u, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Il se peut (exceptionnellement) que le second membre φ_1 de la première équation ne contienne que x et y. Dans ce cas en remplaçant, pour la symétrie des notations, y par Y, cette équation sera du premier ordre en Y seul. On aura donc à effectuer l'intégration de cette équation unique, suivie de celle d'un système d'ordre $n-1$ (où y ne devra plus être considéré comme inconnu).

Si, au contraire (cas général), φ_1 contient au moins une inconnue z autre que y, on fera un changement d'inconnues où $Z = \varphi_1$ sera introduite à la place de z. La première équation aura donc la forme

$$\frac{dY}{dx} = Z. \tag{3}$$

Le calcul du changement de variables nous donnera (comme seconde équation) la valeur de $\frac{dZ}{dx}$, soit

$$\frac{dZ}{dx} = \psi_2.$$

Si ψ_2 ne contient que x, Y et Z, on est ramené, d'après la forme de l'équation (3), à une équation unique du second ordre

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{d^2 Y}{dx^2} = \psi_2\left(x, Y, \frac{dY}{dx}\right),$$

puis à l'intégration des équations restantes qui (Y et Z étant considérés comme connus) forment un système canonique d'ordre $n-2$.

En général, au contraire, ψ_2 contiendra au moins une inconnue u distincte de Y et de Z : à la place de u, introduisons alors la nouvelle inconnue $U = \psi_2$, etc.

Continuant ainsi, le cas général sera celui où les

$n - 1$ premières équations seront amenées à la forme

$$(4) \qquad \frac{dY}{dx} = Z, \qquad \frac{dZ}{dx} = U, \qquad \ldots,$$

la $n^{\text{ième}}$ seule conservant une forme telle que

$$\frac{dW}{dx} = \psi_n(x, Y, Z, \ldots, W)$$

ou, comme Z, ..., W sont, d'après (4), les dérivées successives de Y,

$$\frac{d^n Y}{dx^n} = \psi_n\left(x, Y, \frac{dY}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}}\right).$$

On a bien alors une équation du $n^{\text{ième}}$ ordre en $Y = y$, toutes les autres inconnues s'exprimant d'ailleurs en fonctions connues de Y, Z, ..., c'est-à-dire de Y et de ses dérivées.

Mais, comme on le voit, il est des cas exceptionnels où l'on est ramené à l'intégration successive (et non plus simultanée) de plusieurs équations d'ordres respectifs p, q, r, ..., avec $p + q + r + \ldots = n$. La première d'entre elles est d'ailleurs l'équation en y (inconnue non modifiée par notre changement de variables).

On a donc ainsi, dans tous les cas, l'équation qui renferme l'inconnue y qu'on a pu se proposer plus spécialement de déterminer.

Dans le cas général où l'équation en y est d'ordre n, les dérivées successives de y fournissent les inconnues suivantes Z, U, ...

Elles permettent donc d'obtenir toutes les inconnues primitives z, u, ... par des opérations algébriques : à savoir, par le changement de variables ponctuel défini

par les relations

$$\varphi_1(x, y, z, u, \ldots) = Z,$$
$$\psi_2(x, y, Z, u, \ldots) = U,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si, au contraire, l'équation en y est d'ordre inférieur à n, la détermination des inconnues restantes exigera de nouvelles intégrations.

[O[1]2e][P[1]1e]

SUR LES CENTRES DE COURBURE DES COURBES AFFINES D'UNE COURBE DONNÉE;

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires ou obliques, m un point variable d'une courbe (m), M le point qui divise l'ordonnée de m dans un rapport constant k; quand le point m décrit la courbe (m), le lieu du point M est une courbe (M) affine de (m). L'axe Ox est l'*axe* d'affinité, k le *rapport* d'affinité. On sait que la tangente en m à (m) et celle en M à (M) se coupent en un point Q de Ox.

Nous avons donné (¹) une solution du problème qui consiste à construire le centre de courbure C de la courbe (M) au point M, connaissant le centre de courbure c de la courbe (m) en m; une autre méthode a été indiquée par M. Balitrand (²). Nous nous propo-

(¹) *Nouvelles Annales*, 1915, p. 423.

(²) *Construction du centre de courbure de l'hyperbolisme et de l'affine d'une courbe donnée* (*Nouvelles Annales*, 1916, p. 74-78). Cette construction suppose des axes de coordonnées rectangulaires.

sons d'indiquer plusieurs autres solutions simples de ce problème et de signaler quelques propriétés de la courbe, lieu des centres de courbure aux points correspondants des courbes affines de (m) répondant aux diverses valeurs du rapport d'affinité k.

1. On a d'abord (*fig.* 1) la construction suivante (*Nouvelles Annales*, 1915, p. 424) :

La perpendiculaire élevée en Q *sur* Ox *rencontre en* q' *la normale en* m *à* (m); *soient* n *le symétrique de* Q *par rapport à* m, n' *celui de* q' *par rapport à* c; *la perpendiculaire en* n *à* nn' *coupe* Ox *en* R.

Fig. 1.

Ce point R sert ensuite à construire les centres de courbure aux points correspondant à m dans toutes les courbes affines de (m). On obtient le centre de courbure C de (M) au point M de la manière suivante :

Soit N *le symétrique de* Q *par rapport à* M; *la normale en* M *à* (M) *rencontre en* N' *et* Q' *les perpendiculaires élevées sur* NR *en* N *et sur* Ox

en Q; *le milieu de* Q′N′ *est le centre de courbure cherché.*

Considérons maintenant une hyperbole passant par m, ayant en ce point même centre de courbure que (m) et dont Ox est l'une des asymptotes. Si l'on applique à cette hyperbole la transformation par affinité par laquelle on déduit (M) de (m), on obtient une autre hyperbole. Celle-ci a même centre que la première, elle a Ox pour asymptote, passe par M et y a même centre de courbure que la courbe (M). Or, il est aisé de construire le centre commun à ces hyperboles, connaissant le centre de courbure de (m) en m. D'après un théorème de M. d'Ocagne [1], il suffit d'élever en Q sur Qc une perpendiculaire qui rencontre la normale mc en t, et de mener par t une parallèle à la tangente à (m) en m; cette parallèle coupe Ox au centre cherché. Il est intéressant d'observer que ce centre coïncide avec le point R considéré dans la solution rappelée ci-dessus. Du point R on déduira le centre de courbure cherché C par une construction inverse de celle par laquelle on a obtenu le point R connaissant c. On obtient ainsi cette construction :

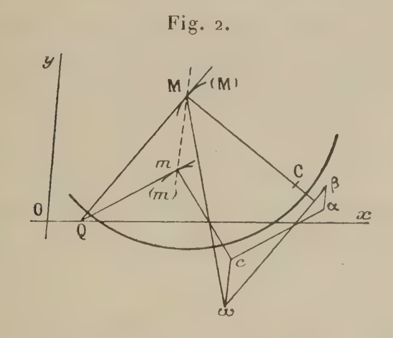
La perpendiculaire élevée en Q *sur* cQ *rencontre en* t *la normale en* m *à* (m); *la parallèle à la tangente en* m *à* (m) *menée par le point* t *coupe* Ox *en* R. *Soit* T *l'intersection de la normale à* (M) *en* M *avec la parallèle menée par le point* R *à la tangente en* M *à* (M); *la perpendiculaire élevée en* Q *sur* QT *passe par le centre de courbure cherché* C.

---

(1) *Nouvelles Annales*, 1902, p. 232. *Voir* aussi un article de M. Bouvaist (*Nouvelles Annales*, 1914, p. 337-356) et la question 2257 de M. d'Ocagne (*Nouvelles Annales*, 1915, p. 432).

2. Soit encore (Γ) l'ellipse affine du cercle osculateur (γ) de la courbe (*m*) en *m*; cette conique a en M même centre de courbure que la courbe (M). Le centre ω de (Γ) est à l'intersection de la parallèle menée par *c* à O*y* avec la droite qui joint M à l'intersection de *mc* avec O*x* (*fig.* 2). Il est, en outre, facile de cons-

Fig. 2.



truire le demi-diamètre ωβ conjugué à Mω dans l'ellipse (Γ); à cet effet, on élève en *c* une perpendiculaire *c*α égale à *cm*; le point β est à l'intersection des parallèles menées par α à *m*M et par ω à MQ. On sait, d'autre part, d'après un théorème de Chasles ([1]), que si, sur la normale en un point M d'une ellipse, on porte, de part et d'autre de ce point, deux segments égaux au demi-diamètre conjugué à celui qui aboutit à ce point, puis qu'on prenne sur cette normale la projection du centre ω de l'ellipse, le centre de courbure de (Γ) en M sera le conjugué harmonique de ce point par rapport aux extrémités de ces deux segments. De

([1]) *Journal de Liouville*, t. X, p. 208.

Voir aussi A. Mannheim, *Construction des centres de courbure des lignes décrites dans le mouvement d'une figure plane qui glisse sur son plan* (*Journal de l'École Polytechnique*, 37e cahier, 1858).

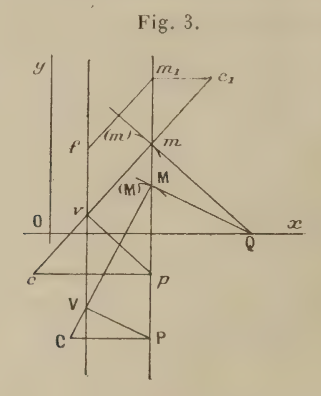
ce qui précède, on déduit donc la construction suivante :

Soit ω *le point de rencontre de la parallèle menée par* c *à* mM *avec la droite qui joint* M *à l'intersection de* cm *avec* Ox. *On élève en* c *sur* cm *une perpendiculaire* $c\alpha$ *égale à* cm; *les parallèles menées par* α *à* mM *et par* ω *à* MQ *se coupent en* β. *Le centre de courbure cherché* C *est le pôle de* $\omega\beta$ *par rapport au cercle ayant* M *pour centre et* $\omega\beta$ *pour rayon.*

Les trois constructions qui précèdent sont applicables si les axes sont rectangulaires ou obliques; dans ce qui suit, nous supposerons les axes Ox, Oy *rectangulaires.*

3. M. Balitrand a indiqué dans les *Nouvelles Annales* (1916, p. 78) la méthode suivante (*fig.* 3) :

Fig. 3.



On prolonge le rayon de courbure cm *de* (m) *d'une longueur* $mc_1 = \frac{1}{2}mc$ *et l'on mène par* c_1 *une parallèle à* Ox *qui coupe* mM *en* m_1. *Par le point* f, *symétrique de* m_1 *par rapport à la tangente en* m

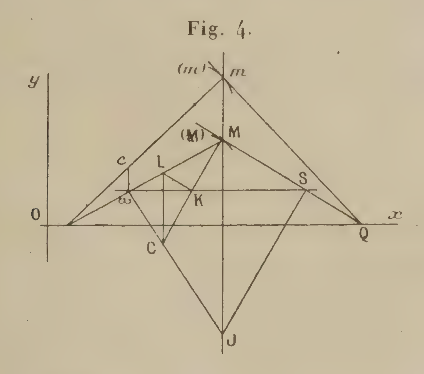
à (m), on mène une perpendiculaire à Ox. *Du point où elle rencontre la normale en* M *on tire la parallèle à la tangente en* M *et par* M *on tire une parallèle à* Oy. *Par le point d'intersection de ces deux parallèles, on mène la parallèle à* Ox; *elle passe au centre de courbure cherché.*

On en déduit cette autre construction :

Soient p *la projection de* c *sur* mM, v *celle de* p *sur* mc, V *l'intersection de la normale en* M *à* (M) *avec la parallèle menée par* V *à* mM; *la perpendiculaire élevée en* V *sur la normale à* (M) *en* M *coupe* mM *en* P, *la parallèle menée par* P *à* Ox *passe au centre de courbure cherché.*

4. Considérons maintenant l'ellipse (Γ) affine du cercle osculateur de (m) au point m. D'après la construction de Mannheim, si K est l'intersection du grand axe de (Γ) avec la normale en M à (M) et si L est le

Fig. 4.



point où la perpendiculaire élevée en K sur MK rencontre Mω, le centre de courbure de (Γ) en M appartient à la parallèle menée par L à Oy. On obtient ainsi la construction suivante (*fig.* 4) :

La droite qui joint M *au point d'intersection de mc avec* Ox *coupe en* ω *la parallèle menée par c à* Oy; *la parallèle à* Ox *menée par* ω *rencontre en* K *la normale en* M *à* (M); *la parallèle à* Oy *menée par le point d'intersection de* Mω *avec la perpendiculaire élevée en* K *sur* MK *contient le centre de courbure cherché.*

On peut encore construire d'une autre manière le centre de courbure de l'ellipse (Γ) au point M. Soit S le point d'intersection de la tangente MQ avec le grand axe Kω; si la perpendiculaire élevée en S sur MS rencontre mM en J, la droite Jω renferme le centre de courbure C de (Γ) au point M. On en déduit la méthode suivante pour construire le centre de courbure C de (M) en M connaissant le centre de courbure c de (m) en m :

La droite qui joint M *au point d'intersection de mc avec* Ox *coupe en* ω *la parallèle menée par c à* Oy, *la parallèle à* Ox *menée par* ω *rencontre en* S *la tangente à* (M) *en* M; *le centre de courbure* C *appartient à la droite qui joint* ω *à l'intersection de m*M *avec la perpendiculaire élevée en* S *sur* MS.

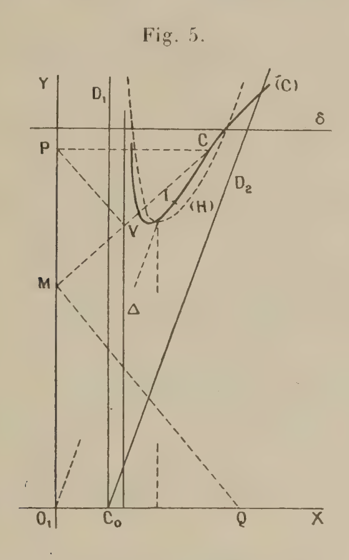
5. *Lieu des centres de courbure aux points correspondants des courbes affines d'une courbe donnée.* — Prenons maintenant comme axes de coordonnées O_1X, O_1Y l'axe d'affinité et la droite mM, la partie positive de l'axe des X étant celle qui renferme le point Q. D'après la deuxième construction indiquée au paragraphe 3, le lieu considéré peut être défini comme suit (*fig.* 5) [1] :

---

[1] La courbe (C) admet O_1X pour axe de symétrie; dans la

Étant donnés deux axes rectangulaires O_1X et O_1Y et une droite Δ parallèle à O_1Y, on mène par un point fixe Q de O_1X une droite variable qui rencontre O_1Y

Fig. 5.



en M; la perpendiculaire à QM en M coupe Δ en V, celle en V à MV rencontre O_1Y en P, lieu (C) du point d'intersection C de MV avec la parallèle menée par P à O_1X.

Si $X = d$ est l'équation de Δ, et si a désigne l'abscisse du point Q, on trouve facilement que le lieu considéré est la cubique

$$(1) \qquad Y\sqrt{d(X-d)} + (a+d)X - ad = 0.$$

Posons

$$\frac{ad}{a+d} = b.$$

---

figure 5, la branche située du côté des Y positifs est seule représentée.

La cubique (C) coupe l'axe O_1X au point $C_0(b, o)$; en prenant pour nouvel axe des ordonnées la parallèle menée par ce dernier point à Δ, l'équation de la cubique devient

$$(2) \qquad b(b-a)\xi\eta^2 + a^3\xi^2 + b^3\eta^2 = 0,$$

ou encore

$$(3) \qquad \eta = a\sqrt{\frac{a}{b}}\,\frac{\xi}{\sqrt{(a-b)\xi - b^2}}.$$

D'après l'équation (1), *la cubique* (C) *a la droite* Δ *pour asymptote*. L'équation (3) montre que *le point* C_0 *est un point isolé ou un point double de* (C) *suivant que les points* C_0 *et* Q *sont situés d'un même côté ou de part et d'autre de la droite* Δ.

Les constructions données aux paragraphes précédents donnent encore d'autres définitions simples de la cubique (C); on a, par exemple, les deux suivantes :

Étant donnés deux points R et Q et une droite O_1Y perpendiculaire à RQ, on mène par Q une droite variable coupant O_1Y en M et l'on projette R en T sur la perpendiculaire élevée en M sur QM, lieu du point d'intersection de MT avec la perpendiculaire élevée en Q sur QT.

Étant donnés deux points C_0 et Q et une droite O_1Y perpendiculaire à C_0Q, on considère un angle droit variable de sommet Q dont les côtés coupent O_1Y en M et J, lieu de l'intersection de C_0J avec la perpendiculaire élevée en M sur QM.

6. Distinguons maintenant les deux cas où C_0 et Q sont situés d'un même côté ou de part et d'autre de la droite O_1Y.

Dans ce dernier cas, b est négatif; posons donc $b = -b'$ et l'équation (2) s'écrit

$$b'(b'+a)\xi\eta^2 + a^3\xi^2 - b'^3\eta^2 = 0.$$

Considérons d'abord le premier cas; soit δ la droite d'équation

$$\eta = a\sqrt{\frac{a}{b}},$$

et prenons l'*hyperbolisme* [1] de (C), le pôle étant le point C_0, l'axe la droite δ. On obtient l'équation

$$(4) \qquad (b-a)\xi\eta + a(\xi^2+\beta^2)\sqrt{\frac{a}{b}} = 0.$$

Elle représente une hyperbole ayant C_0 pour centre et dont l'une des asymptotes D_1 est perpendiculaire à l'axe d'affinité.

Si l'on considère de même dans le second cas (*fig.* 6) la droite δ' d'équation

$$\eta = a\sqrt{\frac{a}{b'}},$$

et si l'on prend encore l'hyperbolisme de (C), le pôle étant le point C_0, l'axe la droite δ', on trouve

$$(5) \qquad (b'+a)\xi\eta + a(\xi^2 - b'^2)\sqrt{\frac{a}{b'}} = 0.$$

Cette équation représente une hyperbole ayant C_0 pour centre et dont l'une des asymptotes D_1 est perpendiculaire à δ'. On a donc cette nouvelle définition de la cubique (C) :

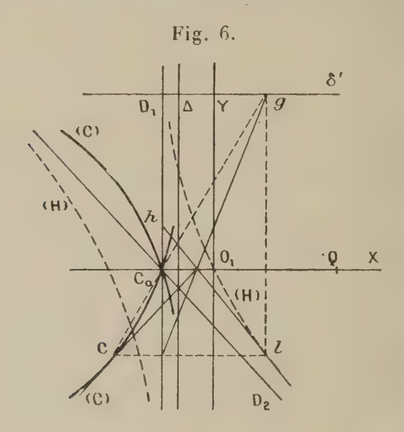
La cubique, lieu des centres de courbure aux

---

[1] Voir le *Traité des courbes spéciales remarquables* de M. Gomès Teixeira, t. I, p. 95, 99, 151; voir aussi *Nouvelles Annales*, 1915, p. 403, 520; 1916, p. 74 et 83.

points correspondants d'une famille de courbes affines est l'anti-hyperbolisme d'une hyperbole (H), *le pôle étant le centre de* (H) *et l'axe une perpendiculaire à l'une des asymptotes.*

Fig. 6.



Dans le premier cas considéré, la seconde asymptote D_2 de (H) est la droite qui joint C_0 à la projection de Q sur δ ou la symétrique de cette droite par rapport à O_1X, suivant que le point C_0 se trouve entre O_1 et Q ou au delà du point Q.

Dans le second cas considéré, la seconde asymptote est la symétrique, par rapport à O_1X, de la droite qui joint C_0 à la projection de Q sur δ'.

La *construction de la tangente* en un point C de la cubique (C) résulte immédiatement de ce qui précède :

La parallèle à Δ *menée par le point g où* C_0C *rencontre* δ *(ou* δ'*), coupe en l celle menée par* C *à* C_0Q. *Soit h le symétrique de* C_0 *par rapport au point où la parallèle menée par l à* D_2 *rencontre* D_1 ; *la tangente en* C *à* (C) *passe par l'intersection*

de hl avec la droite qui joint g à la projection de C *sur* D_1.

Dans chacun des deux cas considérés, la détermination directe de (H) est d'ailleurs aisée.

D'après l'équation (4), dans le premier cas, l'un des points de (H) où la tangente est parallèle à δ a pour coordonnées

$$\xi = b, \qquad \eta = \frac{2ab}{a-b}\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Ce point est donc à l'intersection de la parallèle menée par O_1 à D_2 avec celle menée à Δ par le symétrique de O_1 par rapport à C_0.

Au moyen de l'équation (3), on trouve aisément que la cubique (C) a dans ce cas deux points d'inflexion I situés sur la droite

$$\xi = \frac{4b^2}{a-b};$$

la distance de C_0 à cette droite vaut quatre fois celle de C_0 à Δ.

Dans le second cas, l'hyperbole (H) est immédiatement déterminée puisqu'on connaît ses asymptotes et l'un de ses points; on voit, en effet, d'après l'équation (5), qu'elle passe par le point d'intersection O_1 de mM avec l'axe d'affinité.

NÉCROLOGIE.

Gaston DARBOUX.

C'est une grande perte que la Science française vient de faire, le 23 février dernier, jour du décès de Gaston Darboux.

Il était né à Nîmes le 13 août 1842. En 1861, il fut admis premier à l'École Polytechnique et à l'École Normale supérieure, pour laquelle il opta.

Pendant six années professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand, il devint professeur à la Faculté des Sciences, et suppléant de Joseph Bertrand au Collège de France.

Doyen de la Faculté des Sciences pendant plusieurs années, élu à l'Académie des Sciences (Section de Géométrie) en 1884, il en était secrétaire perpétuel depuis 1900.

Nous ne saurions entreprendre ici une analyse, ni même une énumération des travaux qui constituent son œuvre. Le nombre des Mémoires et des Ouvrages qu'il a publiés est considérable. Presque tous se rapportent à l'Analyse et à la Géométrie, sciences dont il savait merveilleusement utiliser les ressources pour parvenir à la vérité, loin de vouloir les opposer l'une à l'autre, ou tenter d'établir entre elles une sorte de hiérarchie, forcément injustifiée.

Rappelons en terminant que Darboux avait, en 1870, fondé le *Bulletin des Sciences mathématiques* dont il a gardé la direction jusqu'à sa mort.

La Rédaction.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1809.

(1898, p. 484.)

Les solutions communes aux deux équations

$$F(p, q, z) = 0,$$
$$F_1(r, s, t, p, q, z) = 0,$$

la seconde n'étant pas, bien entendu, une conséquence de la première, sont de la forme

$$z = \varphi(mx + ny),$$

m et n étant deux constantes. A. Pellet.

SOLUTION

Par l'auteur.

Lorsque les dérivées partielles, p et q, d'une fonction z de deux variables x, y, sont des fonctions de z, cette fonction z est de la forme $\varphi(mx + ny)$, m et n étant des constantes.

En effet, la relation $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, qui résulte de ce que p et q sont les deux dérivées de z, devient

$$q\frac{dp}{dz} = p\frac{dq}{dz};$$

d'où

$$q = ap,$$

a étant une constante. Portant dans la différentielle

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

elle devient

$$dz = p(dx + a\,dy);$$

et enfin on a

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{p} = x + ay + b,$$

a et b étant des constantes.

Si la fonction z satisfait aux deux équations

$$F(p, q, z) = 0, \qquad F_1(r, s, t, p, q, z) = 0,$$

elle satisfera à une autre équation

$$F_2(p, q, z) = 0,$$

et par suite p et q seront des fonctions de z. Dérivons $F = 0$ par rapport à x et y, on obtient deux équations entre r, s, t; la dérivation de celles-ci donne trois équations entre les dérivées troisièmes de z, et la dérivation de $F_1 = 0$ en donne deux; l'élimination de ces dérivées troisièmes, au nombre de quatre, conduit à égaler à zéro un déterminant qu'on suppose n'être pas identiquement nul en vertu de $F = 0$. On a ainsi quatre équations entre r, s, t et l'élimination de ces trois quantités conduit à l'équation $F_2(p, q, z) = 0$. On retombe ainsi sur le cas étudié au début.

1843.

(1900, p. 191.)

Appelons SECOND CENTRE DE COURBURE *d'une courbe en un point* M *le centre de courbure de la développée au point où elle est touchée par la normale en* M. *Le lieu des seconds centres de courbure des courbes triangulaires*

$$AX^m + BY^m + CZ^m = 0$$

tangentes en M *à une droite donnée* MT, *lorsque m varie, est une parabole passant par* M *et admettant* MT *pour diamètre.*

A. PELLET.

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

Soit

$$y = \frac{a}{2}x^2 + \frac{a_1}{6}x^3 + \ldots$$

l'équation d'une courbe rapportée à ses coordonnées normales

(la tangente et la normale) en un point que l'on prend pour origine. L'enveloppe de la normale aux points voisins de l'origine, $X - x + y'(Y - y) = 0$, est donnée par les équations

$$Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = \frac{1}{a} - \frac{a_1}{a^2} x + \ldots,$$

$$X = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y' = \frac{a_1}{2a} x^2 + \ldots.$$

Les coordonnées du centre de courbure de cette enveloppe correspondant au point $x = 0$ sont

$$X = \frac{a_1}{a^3}, \qquad Y = \frac{1}{a}.$$

Les courbes de la famille

$$AX^m + BY^m + CZ^m = 0,$$

tangentes en M à une droite MT, lorsque m varie, rapportées à la droite MT et à la perpendiculaire menée par M à cette droite, ont pour équation (voir *Bulletin de la Société mathématique*, *Construction des rayons de courbure d'une classe de courbes*, t. XXXV, 1907)

$$y = \frac{(1 - m)b}{2} x^2 + \frac{(1 - m)(b_1 m + b_2)}{6} x^3 + \ldots.$$

Ainsi on a pour ces courbes

$$a = (1 - m)b, \qquad a_1 = (1 - m)(b_1 m + b^2);$$

$$X = \frac{a_1}{a^3} = \frac{b_1 m + b_2}{(1 - m)^2 b^2}, \qquad Y = \frac{1}{a} = \frac{1}{(1 - m)b}.$$

L'élimination de m conduit à la parabole

$$(b_1 + b_2) b Y^2 = b^2 X + b_1 Y,$$

dont l'axe est parallèle à la droite MT.

1882.

(1900, p. 572.)

Étant données deux paraboles focales l'une de l'autre

dans l'espace, la surface réglée engendrée par une droite s'appuyant sur ces deux paraboles et parallèle à un plan passant par l'axe commun des paraboles est un conoïde droit. A. PELLET.

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

Soient les deux paraboles

$$z = 0, \qquad y^2 = 2px;$$
$$y = 0, \qquad z^2 = -2px + p^2;$$

focales des paraboloïdes

$$\frac{y^2}{p+\lambda} + \frac{z^2}{\lambda} - 2x + \lambda = 0.$$

Le plan $my + nz - u = 0$, où u est variable, parallèle à l'axe commun des paraboles, qui est l'axe des x, coupe ces paraboles aux points

$$z = 0, \qquad y = \frac{u}{m}, \qquad x = \frac{u^2}{2pm^2};$$
$$z = \frac{u}{n}, \qquad y = 0, \qquad x = -\frac{1}{2p}\left(\frac{u^2}{n^2} - p^2\right).$$

La droite qui passe par ces deux points engendre, quand u varie, le conoïde considéré. Il s'agit de montrer que le plan mené par cette génératrice, perpendiculairement au plan directeur $my + nz = 0$, passe par une droite fixe. L'équation de ce plan est

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & m & n & 0 \\ \dfrac{u^2}{2pm^2} & \dfrac{u}{m} & 0 & 1 \\ -\dfrac{u^2}{2pn^2} + \dfrac{p}{2} & 0 & \dfrac{u}{n} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Une transformation facile permet de l'écrire :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & m & n & 0 \\ \dfrac{pn^2}{2} & 0 & 0 & m^2+n^2 \\ \dfrac{u^2}{2p}\left(\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}\right)-\dfrac{p}{2} & \dfrac{u}{m} & \dfrac{-u}{n} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Divisons les termes de la dernière ligne horizontale par u, et développons, en posant

$$v = \frac{u}{2p}\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right) - \frac{p}{2u};$$

il vient

$$v(-ny+mz) + \frac{m^2+n^2}{mn}\left[(m^2+n^2)x - \frac{pn^2}{2}\right] = 0.$$

Ainsi les génératrices s'appuient sur une droite perpendiculaire au plan directeur et qui rencontre l'axe commun des paraboles en un point situé entre leurs sommets.

2056.

(1906, p. 575.)

Trouver le minimum de la plus courte distance des cercles osculateurs aux sommets situés sur le grand axe et le petit axe d'une ellipse, pour les ellipses ayant même cercle de Monge ou même axe. A. Pellet.

Solution

Par l'auteur.

Pour l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (a^2 > b^2),$$

la plus courte distance des cercles de courbure au sommet situé sur le grand axe et à celui situé sur le petit axe est

$$\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} - \sqrt{\left(\frac{a^2}{b} - b\right)^2 + \left(a - \frac{b^2}{a}\right)^2} = d.$$

Le rapport de d à la différence des demi-axes $a - b$,

$$\frac{d}{a-b} = \frac{r}{1 + r + r^2 + (1+r)\sqrt{1+z^2}}, \qquad r = \frac{b}{a}.$$

Ce rapport va en augmentant depuis $r = 0$ jusqu'à $r = 1$; pour $r = 1$, il est égal à $3 - 2\sqrt{2}$. Pour $a^2 + b^2$ constant, ce rapport acquiert sa plus grande valeur pour $a = b$.

2062.

(1907, p. 95.)

Soit p *un nombre entier qui divise l'un des nombres* $2^{\frac{p-1}{2}} + 1$, $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ *et qui, écrit dans le système de numération binaire, a* n *chiffres. Le nombre* $\frac{2^{p-1} - 1}{p}$, *écrit dans le même système, présente en son centre* $(n-1)$ *chiffres* 1 *encadrés de deux zéros, ou bien* $(n-1)$ *zéros encadrés de deux chiffres* 1.

R. Amsler.

Solution

Par M. A. Gérardin.

On sait, d'après le *théorème de Fermat*, que p doit être *premier*, puisque, d'après l'énoncé, il doit avoir n chiffres en numération binaire; il doit donc s'écrire en numération décimale

$$p = 2^{n-1} + h\,2^a + 1,$$

h étant un entier, et $(n-1)$ étant le plus haut exposant du développement décimal de p. Le nombre $N = \frac{1}{p}(2^{p-1} - 1)$ sera représenté, en binaire, par le quotient de $2^{n-1} + h\,2^a$ unités par un nombre de n chiffres, formé, en général, d'unités et de zéros.

La démonstration semble difficile, d'une manière générale; mais on arrivera facilement à des cas intéressants, en se donnant h et a.

Supposons ainsi

$$p = 2^n - 3 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^2 - 1.$$

Voici les premiers termes du développement décimal de N :

$$N = 2^{2^n-n-4} + 2^{2^n-2n-3} + 2^{2^n-2n-4}$$
$$+ 2^{2^n-3n-1} + 2^{2^n-3n-4} + 2^{2^n-4n} + 2^{2^n-4n-1} + \ldots .$$

Le nombre des chiffres de N en binaire égale $p - n$; ce nombre N doit être formé en général de la manière suivante : à partir de la droite : $\frac{p+1}{2} - n$ chiffres différents, unités ou zéros, puis $(n-1)$ chiffres semblables au centre, enfin $\frac{p+1}{2} - n$ chiffres différents; le rang du premier chiffre du centre est donné par $2^{2^{n-1}-3}$, et le dernier par $2^{2^{n-1}-n-1}$.

Les solutions se partagent en deux groupes : celui où N est symétrique sera étudié dans la réponse 2063; les autres valeurs de *p premier* donnent une solution à 2062.

Voici quelques exemples :

$$n = 4, \qquad p = 13 \quad \text{ou} \quad 1101, \qquad N = 100\underline{111}011;$$
$$n = 5, \qquad p = 11101, \qquad N = 1000110100\underline{1111}0111001011;$$
$$n = 6, \qquad p = 2^6 - 3 = 61 \quad \text{ou} \quad 111101;$$
$$n = 9, \qquad p = 2^9 - 3 = 509 \quad \text{ou} \quad 111111101, \qquad \ldots;$$
$$p = 19 \quad \text{donne} \quad N = 11010\underline{1111}00101.$$

On pourra consulter le *Sphinx-Œdipe*, 1908-1909, articles de MM. Ern. Lebon et A. Gérardin, p. 81-83 et 97-112.

Les plus petites solutions sont : $p = 13, 19, 23, 29, 37, 41, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 79, \ldots$ pour N dissymétrique en binaire.

2063.

(1907, p. 95.)

p étant premier, chercher les nombres $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ qui, écrits dans le système de numération binaire, présentent une symétrie parfaite. R. Amsler.

Solution
Par M. A. Gérardin.

Je ne puis donner qu'un très bref résumé des résultats obtenus, en disant quelques mots de cas particuliers.

Premier cas. — *p premier en décimal et symétrique en binaire :*

I. Supposons $p = 2^n - 1$, formé, en binaire, avec n chiffres 1. $N = \frac{1}{p}[2^{p-1} - 1]$ sera, dans la même numération, le quotient de $2^n - 2$ chiffres 1 par p. Ce nombre N s'écrira donc avec $\frac{2^n - 2}{n}$ chiffres 1 séparés chacun par un groupe de $(n-1)$ zéros, le nombre $\frac{2^n - 2}{n}$ étant entier, d'après le théorème de Fermat, pour n premier. On voit donc que :

Lorsque $p = 2^n - 1$ est un nombre de Mersenne premier, c'est-à-dire lorsque $n = 2, 3, 5, 7, 19, 31, 61, 89, 107$ et 127, on aura une solution du problème, et voici la liste des douze valeurs minima :

$p = 3$, 7, 31, 127, 8191, 131 071, 524 827, 2 147 483 647,
2 305 843 009 213 693 951, 618 970 019 642 690 137 449 562 111,
162 259 276 829 213 363 391 578 010 288 127,

et

170 141 183 458 469 231 731 687 303 715 884 105 727.

Au centre, on voit, *en binaire,* un groupe de $(n - 1)$ zéros encadrés de deux groupes de 1 unité.

II. Supposons maintenant $p = 2y + 1$. Pour que p soit *premier*, il faut que $y = 2^u$; p est alors un *nombre de Fermat.* On sait que $2^{4a+2} + 1$ est toujours composé, 5 excepté (Euler, puis Aurifeuille), et que $2^{2a+1} + 1$ est toujours multiple de 3. On aura

$$N = \frac{2^{2^{2^u}} - 1}{2^{2^u} + 1},$$

ou en *numération binaire* le quotient d'un nombre formé de 2^{2^u} unités par un nombre ayant $(2^u - 1)$ zéros encadrés par deux chiffres 1. Le nombre N cherché, symétrique en binaire, sera, à partir de la droite, formé de 2^u unités, puis de 2^u zéros, et ainsi de suite, périodiquement. Le nombre des chiffres de N ajouté à celui de p, écrits en binaire, est de $2^{2^u} + 1$; le nombre des chiffres de p est $2^u + 1$ et celui des chiffres de N est donc $2^u(2^{2^u - u} - 1)$.

Le nombre des groupes (de chiffres 1 et de zéros) qui composent N est de $(2^{2^u-u}-1)$ et chaque groupe est formé de 2^u termes, unités et zéros, successivement. Il y a 2^{2^u-u-1} groupes de chiffres 1 et $2^{2^u-u-1}-1$ groupes de zéros intercalés.

On voit, *au centre*, 2^u zéros encadrés de deux groupes de 2^u unités. La solution $p=3$ est déjà connue.

Lorsque $p=2^{2^u}+1$ *est un nombre de Fermat premier, ce qui a lieu pour* $u=0, 1, 2, 3, 4$ *ou bien* $p=3, 5, 17, 257, 65537$, *on aura quatre solutions nouvelles; il n'y a pas d'autre solution pour p ayant en numération décimale moins de cent vingt chiffres. Le nombre des chiffres de* N, *en binaire, est successivement* 1, 2, 12, 248, 65520, ...

III. Supposons maintenant *p premier* de la forme

$$2^{2x}+2^x+1\,;$$

on aura

$$N=\frac{2^{2^{2x}+2^x}-1}{2^{2x}+2^x+1}$$

qui sera, en binaire, le quotient d'un nombre formé de $2^{2x}+2^x$ unités par le nombre p formé de $2x-1$ chiffres ayant une unité au centre, une à chaque extrémité, séparés par deux groupes de $(x-1)$ zéros intercalaires.

Le nombre des unités de ce numérateur est toujours le double d'un triangulaire; le nombre symétrique N cherché est formé par un premier groupe de x unités, puis $2x$ zéros, ceci formant un groupe périodique à partir de la droite; le nombre des chiffres de N sera $2^{2x}-2^x-2x$; le nombre des périodes complètes sera $\dfrac{2^{2x}+2^x-2x}{3x}$, ce qui impose $x=1$ ou encore x égal à un multiple impair de 3. Ceci nous donne une seule nouvelle solution $x=3$, $p=73$; il n'y en a pas d'autre pour p inférieur à un milliard. *Au centre*, $2x$ zéros encadrés de deux groupes de x unités.

IV. Supposons *p premier, symétrique en binaire et inférieur à* 2000. Ceci englobe toutes les formes particulières précédentes. Je trouve les seules solutions possibles suivantes : $p=3$, 5, 7, 17, 31, 73, 107, 127, 257, 313, 443, 1193, 1453, 1571, 1619, 1831 et 1879. En effet, ces nombres s'écrivent, en

numération binaire :

11, 101, 111, 10001, 11111, 1001001, 1111111, 100000001,
100111001, 110111011, 10010101001, 10110101101,
11000100011, 11001010011, 11100100111, 11101010111.

Parmi ces valeurs, il ne reste à étudier que $p = 107$, 313, 443, 1193, 1453, 1571, 1619, 1831 et 1879. On sait, d'après le théorème de Plateau, que tous ces nombres, écrits en binaire, divisent des nombres formés entièrement d'unités; il reste à vérifier que ces nombres remplissent les conditions du problème spécial posé ici.

Deuxième cas. — Supposons maintenant *p premier et dissymétrique en numération binaire*. Ayant trouvé une solution pour $p = 11 = 2^3 + 2^1 + 1$, j'ai essayé la forme *p premier* égal à

$$1 + 2^1 + 2^3 + 2^5 + \ldots + 2^{2x-3} + 2^{2x-1};$$

en écrivant

$$\begin{aligned} p &= 1 + 2(1 + 4 + 16 + \ldots + 2^{2x-2}) \\ &= 1 + 2(1 + u + u^2 + \ldots + u^{x-1}), \end{aligned}$$

on aura

$$p = 1 + 2\,\frac{u^x - 1}{u - 1} = 1 + 2\,\frac{4^x - 1}{3} = \frac{2^{2x+1} + 1}{3};$$

on aura *p premier* pour $x = 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, \ldots$, ce qui donne $p = 11, 43, 683, 2731, 43691, 174763, 2796203, \ldots$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{N} &= \frac{2^{\frac{1}{3}(2^{2x+1}-2)} - 1}{\frac{1}{3}(2^{2x+1} + 1)} \\ &= \frac{1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{\frac{1}{3}(2^{2x+1}-8)} + 2^{\frac{1}{3}(2^{2x+1}-5)}}{1 + 2^1 + 2^3 + 2^5 + \ldots + 2^{2x-3} + 2^{2x-1}}. \end{aligned}$$

En numération binaire, N sera représenté à partir de la droite par 1, puis 0, ensuite $(2x - 1)$ unités, un zéro, une unité, enfin un groupe de $(2x - 1)$ zéros, ce groupe complet étant périodique. N contient *au centre* $(2x - 1)$ unités encadrées de deux groupes de 1 zéro.

On voit ainsi, en passant, que

$$2^{4x+2} - 1 = (2^{2x+1} - 1)(2^{2x+1} + 1)$$
$$= (2^{2x+2} + 2^{2x} + \ldots + 2^2 + 1)$$
$$\times (2^{2x-1} - 2^{2x-3} + \ldots + 2^3 + 2^1 + 1),$$

ou encore

$$M_q = 2^q - 1 = \frac{1}{3}(2^{q+1} + 2^{q-1} + \ldots + 2^2 + 1).$$

La méthode la plus rapide pour vérifier la valeur de N en numération binaire semble être celle de la décomposition en ses facteurs binaires de l'expression $2^{p-1} - 1$.

Je n'ai pas trouvé d'autre valeur de p *premier* inférieur à 100 en numération décimale, symétrique *ou* dissymétrique, N étant la valeur en *numération décimale*, et B en *binaire :*

$p = 3$	$N = 1$	$B = 1$
5	3	11
7	9	1001
11	93	1011101
17	3855	111100001111

Les trois autres solutions $p = 31$, 43, 73 donnent

$N = 34\,636\,833$, $102\,280\,151\,421$ et $64\,689\,951\,820\,132\,126\,215$

et dans l'ordre

$$B = 10000\;10000\;\underline{10000}\;10000\;100001.$$

La valeur binaire B pour $p = 43$ peut s'écrire

$$B = 10u01z10\underline{u}01z10u01,$$

u étant un groupe de cinq unités et z un groupe de cinq zéros.

Pour $p = 73$ enfin, B s'écrit

$$B = UZUZUZU\underline{Z}UZUZUZU,$$

U étant un groupe de trois unités, et Z un groupe de six zéros.

La somme des unités du nombre B semble être en général un sous-multiple du nombre $(p-1)$ écrit en décimal.

On peut généraliser cette question. On a, par exemple, en *numération ternaire*,

$$N = \frac{1}{p}(3^{p-1} - 1)$$

symétrique pour $p = 5$, puisque N s'écrit alors $1\bar{2}1$.

2118.

(1909, p. 100.)

L'équation $x - e\sin(m + x) = 0$ *peut s'écrire*

$$\operatorname{tang}\left(x + \frac{m}{2}\right) = \frac{\rho + e}{\rho - \varepsilon}\operatorname{tang}\frac{m}{2}, \qquad \text{où} \qquad \rho = \frac{x}{\sin x}.$$

Construire le lieu de l'intersection des droites menées par les extrémités A *et* B *du segment* AB $= e$ *et faisant avec ce segment respectivement les angles* m *et* $m + x$.

A. Pellet.

Note (¹)

Par l'auteur.

L'identité des deux équations est facile à vérifier. Il en résulte que si, sur le segment AB $= e$, on fait un angle égal à m, et si l'on prend AM $= \rho$, l'angle AMB est égal à x. Ce fait m'a paru curieux, et avantageux pour le calcul de x, ρ variant entre 1 et $\frac{e}{\sin e}$. Le lieu du point M lorsque m varie est tangent au cercle de rayon 1 aux points d'intersection avec la droite AB, le centre étant au point A, et au cercle de rayon $1 + \sin e$ au point correspondant à $m = \frac{\pi}{2} - e$, pour lequel $x = e$.

2120.

(1909, p. 100.)

On donne une surface

$$X + Y + Z = 1,$$

X *étant fonction de la seule coordonnée* x, Y *de* y, Z *de* z;

(¹) *Voir* solutions précédentes 1915, p. 573; 1916, p. 174.

trouver les transformées telles que les systèmes conjugués se correspondent sur la surface et sa transformée.

A. Pellet.

Note
Par l'auteur.

Soient u et v les paramètres de deux familles conjuguées sur la surface $X + Y + Z = 1$; on a

$$\begin{vmatrix} x''_{uv} & x'_u & x'_v \\ y''_{uv} & y'_u & y'_v \\ z''_{uv} & z'_u & z'_v \end{vmatrix} = 0,$$

et, en différentiant l'équation de la surface,

$$X'x'_u + Y'y'_u + Z'z'_u = 0, \qquad X'x'_v + Y'y'_v + Z'z'_v = 0,$$
$$X'x''_{uv} + Y'y''_{uv} + Z'z''_{uv} + X''x'_u x'_v + Y''y'_u y'_v + Z''z'_u z'_v = 0.$$

Il en résulte que la dernière équation se décompose en deux et l'on a

$$X'x''_{uv} + Y'y''_{uv} Z'z''_{uv} = 0, \qquad Y''x'_u x'_v + X''y'_u y'_v + Z''z'_u z'_v = 0.$$

Effectuons la transformation faisant correspondre à x, y, z le point $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $\chi(z)$. Pour que u et v soient les paramètres de deux familles conjuguées sur la nouvelle surface, il faut que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi' x''_{uv} + \varphi'' x'_u x'_v & \psi' y''_{uv} + \psi'' y'_u y'_v & \chi' z''_{uv} + \chi'' z'_u z'_v \\ \varphi' x'_u & \psi' y'_u & \chi' z'_u \\ \varphi' x'_v & \psi' y'_v & \chi' z'_v \end{vmatrix} = 0.$$

Divisant les colonnes verticales par φ', ψ', χ' respectivement, on voit que il faut et il suffit, pour que le déterminant soit nul, qu'on ait

$$\frac{\varphi'' X'}{\varphi' X''} = \frac{\psi'' Y'}{\psi' Y''} = \frac{\chi'' Z'}{\chi' Z''}.$$

Ces rapports doivent donc être indépendants des variables et égaux à une même constante μ. Donc :

$$\varphi' = a X'^{\mu}, \qquad \psi' = b Y'^{\mu}, \qquad \chi' = c Z'^{\mu},$$

a, b, c étant trois nouvelles constantes.

Soient, par exemple,

$$X = x^2, \qquad Y = y^2, \qquad Z = z^2,$$

on aura

$$\varphi' = a x^{\mu}, \qquad \psi' = b y^{\mu}, \qquad \chi' = c z^{\mu};$$

puis

$$\varphi = a \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}, \qquad \psi = b \frac{y^{\mu+1}}{\mu+1}, \qquad \chi = c \frac{z^{\mu+1}}{\mu+1}$$

si $\mu \neq -1$. Pour $\mu = -1$,

$$\varphi = a l x, \qquad \psi = b l y, \qquad \chi = c l z.$$

Soit encore

$$X = x^2, \qquad Y = y^2, \qquad Z = -z,$$

il viendra

$$\varphi = \frac{a x^{\mu+1}}{\mu+1}, \qquad \psi = \frac{b y^{\mu+1}}{\mu+1}, \qquad \chi = c z.$$

Les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces.

2160.

(1910, p. 336.)

Appelons « cercle cylindrique » la courbe intersection d'un cylindre de révolution et d'une sphère ayant son centre sur le cylindre. Le rayon de cette sphère sera dit « rayon du cercle cylindrique ».

Étant donné un cercle cylindrique quelconque, montrer qu'on peut lui inscrire une infinité d'hexagones gauches dont tous les côtés aient pour longueur le rayon du cercle cylindrique. Ce théorème généralise la construction classique à l'hexagone régulier.

Plus généralement encore, étant donnés deux cercles cylindriques égaux tracés sur un même cylindre de révolution, montrer qu'il existe une infinité d'hexagones gauches, dont tous les côtés ont pour longueur le rayon commun des deux cercles cylindriques, et dont les sommets se trouvent alternativement sur ces deux courbes.

R. Bricard.

Solution

Par l'Auteur.

Je dirai que quatre points d'un cylindre A_1, A_2, A_3, A_4 sont les sommets d'un *parallélogramme cylindrique* quand, après développement du cylindre, ils deviennent les sommets d'un parallélogramme. Cette relation géométrique peut être traduite symboliquement par l'égalité

$$A_1 + A_3 = A_2 + A_4.$$

Cela posé, soient O, O', A_1, A_2 quatre points quelconques du cylindre. Marquons successivement sur celui-ci les points A_3, A_4, A_5, ... tels que $O A_1 A_2 A_3$, $O' A_2 A_3 A_4$, $O A_3 A_4 A_5$, ... soient des parallélogrammes cylindriques. Je dis que le point A_7 se confond avec A_1.

En effet, on a les égalités symboliques

$$\begin{aligned} A_1 + A_3 &= O + A_2, \\ A_2 + A_4 &= O' + A_3, \\ A_3 + A_5 &= O + A_4, \\ A_4 + A_6 &= O' + A_5, \\ A_5 + A_7 &= O + A_6. \end{aligned}$$

On tire, par addition, des deux premières égalités,

$$A_1 + A_4 = O + O',$$

et des deux dernières,

$$A_4 + A_7 = O' + O,$$

d'où

$$A_7 = A_1,$$

ce qui établit la proposition.

Supposons maintenant que O et O' soient les centres des sphères contenant les cercles cylindriques égaux C et C', et que A_1 et A_2 appartiennent respectivement à ces deux cercles, $A_1 A_2$ étant égal à leur rayon commun. On aura construit en $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ un hexagone gauche dont les sommets appartiennent alternativement aux deux cercles, et dont tous les côtés ont pour longueur le rayon commun de ceux-ci. Le

premier sommet A_1 peut en outre être pris arbitrairement sur C.

La seconde partie de l'énoncé se trouve ainsi démontrée. La première n'en est qu'un cas particulier, celui où les deux cercles cylindriques sont confondus.

2192.

(1912, p. 336.)

Déterminer un cône dont un plan cyclique est perpendiculaire à une génératrice et à la fois à une ligne focale perpendiculaire à un plan tangent.

KLUG.

SOLUTION
Par UN ABONNÉ.

L'énoncé de la question 2192 n'est pas parfaitement clair. Si le cône rapporté à son sommet a pour équation

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

$\varphi(x, y, z)$ désignant une forme quadratique homogène, il est certain que les deux conditions imposées sont insuffisantes à le déterminer. Il convient de supposer que le cône est rapporté à ses plans de symétrie, c'est-à-dire qu'il a une équation de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{1}$$

Soit S sa trace sur le plan de l'infini et C l'ombilicale; intersection commune de toutes les sphères avec ce plan. Les plans cycliques de (1) passent par les cordes communes à S et à C et par suite la première condition revient à dire que le pôle, par rapport à l'ombilicale, de l'une de ces cordes communes se trouve sur S.

On sait que les focales d'un cône sont perpendiculaires aux plans cycliques du cône supplémentaire. La trace du cône supplémentaire de (1) sur le plan de l'infini est la polaire réciproque de S par rapport à l'ombilicale.

Soit Σ cette polaire réciproque. La seconde condition revient à dire que l'une des cordes communes à C et à Σ est tangente à S.

Ce qui précède résulte de ce fait bien connu que les traces, sur le plan de l'infini, d'un plan et d'une droite perpendiculaires sont pôle et polaire par rapport à l'ombilicale.

Au point de vue analytique, les plans cycliques réels du cône représenté par (1) ont pour équation

$$c^2 y^2(a^2 - b^2) - b^2 z^2(a^2 + c^2) = 0.$$

L'une des sécantes communes à S et à C sera par exemple

$$cy\sqrt{a^2 - b^2} - bz\sqrt{a^2 + c^2} = 0,$$

et la condition pour que son pôle, par rapport à C, soit sur S donne

(2) $$c^4(a^2 - b^2) - b^4(a^2 + c^2) = 0.$$

Le cône supplémentaire de (1) a pour équation

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 - c^2 z^2 = 0.$$

Les équations des plans cycliques sont

$$x^2(a^2 - b^2) - z^2(b^2 + c^2) = 0;$$

celle de l'un d'eux sera

$$x\sqrt{a^2 - b^2} - z\sqrt{b^2 + c^2} = 0.$$

La condition de contact avec S donne

(3) $$a^2(a^2 - b^2) - c^2(b^2 + c^2) = 0.$$

Les équations (2) et (3) déterminent les rapports des coefficients de l'équation (1) et par suite le cône qu'elle représente.

2208.

(1913, p. 288; 1914, p. 428.)

Si M *est un point quelconque d'une conique dont* A *est un sommet,* α *étant le centre de courbure répondant à ce sommet, la tangente en* M *à la conique coupe la tangente en* A *sur la perpendiculaire menée de* α *à la corde* AM.

M. D'OCAGNE.

Deuxième solution

Par un Abonné.

On sait que si un cercle et une conique sont tangents, ils sont homologiques. Le centre d'homologie est le point de contact, l'axe d'homologie la corde commune opposée à la tangente. Ici A est le centre d'homologie et la tangente AT en ce point l'axe d'homologie.

Les tangentes au cercle et à la conique en deux points homologues, c'est-à-dire en ligne droite avec A, concourent sur AT ; ce qui démontre le théorème.

Généralisation. — Si le cercle au lieu d'être osculateur est simplement tangent en A, ce point est toujours le centre d'homologie. L'axe d'homologie est une droite perpendiculaire à l'axe qui passe en A, par raison de symétrie. Soient B le sommet opposé à A, B′ le second point de rencontre du cercle avec AB. M et M′ étant deux points homologues, les droites BM et B′M′ sont homologues et se coupent sur l'axe d'homologie. De plus B′M′ et AM′ sont évidemment perpendiculaires. Ainsi : *Si l'on joint un point* M *d'une conique aux extrémités* A *et* B *d'un de ses axes, si l'on prolonge* BM *jusqu'à sa rencontre avec une perpendiculaire à l'axe, la droite abaissée perpendiculairement de ce point sur* AM *passe par un point fixe de* AB.

Ce théorème permet de construire par points une conique connaissant deux sommets et un point de la courbe.

2223.

(1914, p. 336.)

Soient M *et* M′ *les extrémités de deux diamètres conjugués*, F *et* F′ *les foyers d'une ellipse. Trouver le lieu du point d'intersection de* MF, M′F′ *ou de* MF′, M′F.

T. Ono.

Solution

Par un Abonné.

Soit

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-1=0$$

l'équation de l'ellipse. x et y étant les coordonnées de M,

celles de M′ sont

$$\frac{x'}{a} = \mp \frac{y}{b}, \qquad \frac{y'}{b} = \pm \frac{x}{a}.$$

Nous choisirons les signes supérieurs. Le cas où l'on prendrait les signes inférieurs se traiterait de même.

Les équations des droites MF, M′F′ sont

$$\frac{X}{y} = \frac{X - c}{x - c},$$
$$\frac{aY}{bx} = \frac{b(X + c}{-ay + bc}.$$

Les équations résolues par rapport à x et y donnent

$$\frac{x}{a} = \frac{cY(aY + bX - bc)}{a^2 Y^2 + b^2 X^2 - b^2 c^2}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{cY(aY - bX - bc}{a^2 y^2 + b^2 X^2 - b^2 c^2};$$

d'où pour l'équation du lieu du point d'intersection des deux droites MF, M′F′,

$$c^2 y^2 (aY + bX - bc)^2 + c^2 Y^2 (aY - bX - bc^2) - (a^2 Y^2 + b^2 X^2 - b^2 c^2) = 0.$$

C'est une courbe fermée unicursale du quatrième ordre admettant OY pour axe de symétrie. Les foyers F et F′ sont des points doubles, les tangentes à la courbe en ces points sont des droites qui les joignent aux sommets du petit axe. La courbe présente un troisième point double situé sur OY. Il a pour ordonnée $\frac{bc}{a}$.

Le lieu du point d'intersection des droites MF′ et M′F s'obtient en changeant dans l'équation précédente c en $-c$.

2224.

(1914, p. 336.)

Étant donnés deux triangles ABC, A′B′C′, *si les parallèles menées par* A′, B′, C′ *respectivement à* BC, CA, AB, *rencontrent les droites* B′C′, C′A′, A′B′ *en trois points collinéaires, de même, les parallèles menées par* A, B, C *respectivement à* B′C′, C′A′, A′B′, *rencontrent* BC, CA, AB *aussi en trois points collinéaires.* N. Abramescu.

SOLUTION
Par M. T. ONO.

Soient D, E, F [1] les trois points collinéaires où les parallèles menées par A′, B′, C′ à BC, CA, AB rencontrent B′C′, C′A′, A′B′. On peut concevoir le triangle ABC comme formé par les trois diagonales du quadrilatère complet ayant les côtés B′C′, C′A′, A′B′, DEF. Alors en prenant ABC pour triangle de référence, on a

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{DEF}) & l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \\ (\mathrm{B'C'}) & -l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \\ (\mathrm{C'A'}) & l\alpha - m\beta + n\gamma = 0, \\ (\mathrm{A'B'}) & l\alpha + m\beta - n\gamma = 0. \end{array}$$

Soient maintenant D′, E′, F′ les points où les parallèles menées par A, B, C respectivement à B′C′, C′A′, A′B′ rencontrent BC, CA, AB ; on a

$$(\mathrm{AD'}) \qquad \frac{\beta}{cl+an} + \frac{\gamma}{am+bl} = 0,$$

$$(\mathrm{BE'}) \qquad \frac{\gamma}{am+bl} + \frac{\alpha}{bn+cm} = 0,$$

$$(\mathrm{CF'}) \qquad \frac{\alpha}{bn+cm} + \frac{\beta}{cl+an} = 0.$$

On voit donc que les trois points D′, E′, F′ se trouvent sur la droite :

$$\frac{\alpha}{bn+cm} + \frac{\beta}{cl+an} + \frac{\gamma}{am+bl} = 0.$$

Autres solutions par UN ABONNÉ et par M. J. LEMAIRE.

2233.

(1915, p. 54.)

Soient A′B′C′ *les pieds des trois céviennes* AM, BM, CM *du triangle* ABC. *Trouver l'enveloppe* Γ *de l'axe d'homologie* Δ *des triangles* ABC, A′B′C′ *quand le point* M *décrit*

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

une courbe Σ. *En particulier :* 1° *quand la courbe* Σ *est une conique circonscrite au triangle* ABC, Γ *se réduit à un point;* 2° *quand* Σ *est une droite,* Γ *est une conique inscrite au triangle* ABC. *Étudier la transformation* MΔ; 3° *quand la conique* Σ *est une conique variable d'un faisceau passant par les points donnés* A, B, C, D, *la courbe* Γ *se réduit à un point qui décrit deux droites.*

N. Abramescu.

Solution

Par un Abonné.

Les côtés du triangle A′B′C′ rencontrent les côtés correspondants de ABC en trois points qui sont les conjugués harmoniques de A′, B′, C′ par rapport aux sommets de ABC situés sur ces côtés. Si

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$

sont les coordonnées de M, l'équation de Δ est

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0;$$

c'est-à-dire que ses coordonnées u, v, w sont

$$\alpha u = \beta v = \gamma w.$$

Donc si le point M décrit une courbe $f(\alpha, \beta, \gamma)$, la droite Δ enveloppe une courbe correspondante qui a pour équation tangentielle

$$f\left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}, \frac{1}{w}\right) = 0.$$

Depuis la création de la géométrie du triangle, la correspondance entre M et Δ a été fréquemment rencontrée et étudiée. Ces deux éléments sont dits *harmoniquement associés.*

Autre solution par M. T. Ono.

2234.

(1915, p. 54.)

De chaque point M *d'une courbe* (M), *on abaisse une*

perpendiculaire MH *sur une droite fixe* Δ; *par le point* H *on mène les parallèles* HT *et* HN *à la tangente et à la normale en* M *à* (M). *Lorsque* M *décrit* (M), *ces deux droites enveloppent deux courbes* (T) *et* (N). *Montrer que les deux centres de courbure de ces courbes s'obtiennent par la construction suivante : Soient* I *le point de rencontre des normales à* (T) *et* (N) *et* A *la projection sur* Δ *du centre de courbure de la développée de* M; A' *le symétrique de* A *par rapport à* I. *Les projections de* A' *sur les normales aux courbes* (T) *et* (N) *donnent les centres de courbure cherchés* (cf. *Nouvelles Annales*, juin 1913, question 2207). F. Balitrand.

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Prenons la droite Δ pour axe des x et soient

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0,$$
$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi - p' = 0,$$

la tangente et la normale en M à (M).

La droite HT a pour équation

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = p\cos^2\varphi - p'\sin\varphi\cos\varphi,$$

le rayon de courbure correspondant de (T) sera

$$R_T = (p + p'')(2\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) - (p' + p'')\sin\varphi\cos\varphi.$$

La droite HN a pour équation

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi = p'\sin^2\varphi - p\sin\varphi\cos\varphi,$$

le rayon de courbure correspondant de (N) sera

$$R_N = 3(p + p'')\sin\varphi\cos\varphi + (p' + p''')\sin^2\varphi,$$

d'où les deux relations

$$R_T\sin\varphi + R_N\cos\varphi = 2\rho_1\sin\varphi,$$
$$(R_T + \rho_1)\cos\varphi - (R_N - \rho_2)\sin\varphi = 0,$$

ρ_1 et ρ_2 désignant les rayons de courbure de (M) et de sa développée, d'où la construction suivante : C_1 et C_2 désignant les

centres de courbure de (M) et de sa développée, la parallèle à MH menée par C_1 coupe HN en B; prenons sur HN, le point BD tel que $\overline{HB} = \overline{BD}$ et menons par D la parallèle DA′ à Ox. Prenons sur HT un segment HE équipollent à $\overline{C_1 C_2}$, menons par E une parallèle à HN, prenons sur HN un segment $\overline{HB'} = -\overline{HB}$ et menons par B′ une parallèle à HT; ces deux parallèles se coupent en E′; la perpendiculaire à Ox menée par E′ coupe DA′ en A′; les projections de A′ sur les normales à (T) et (N) donneront les centres de courbure cherchés.

Si nous remarquons maintenant que les quadrilatères MC′HB′, $C_1 C_2 E'B'$ sont des parallélogrammes, nous en concluons que les parallèles à MH menées par C_1 et E′ sont équidistantes de MH. Nous savons d'autre part que les normales à (T) et (N) se coupent sur MH au point I tel que $HI = \rho_1 \sin\varphi$; la droite DA′ est donc la symétrique de Ox par rapport à I. Donc si la projection de C_2 sur Ox est A, les trois points A, I, A′ sont en ligne droite et AI = IA′, ce qui démontre la proposition.

ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES.

703 (**1864**, 176). — Déterminer des valeurs entières des quantités x, n, r:

1° Telles que la somme

$$x^3 + (x+r)^3 + \ldots + [x + (n-1)r]^3$$

soit un cube;

2° Telles que cette somme soit le cube de $x + nr$.

B. Boncompagni.

724 (**1865**, 141). — Étant donnés un point quelconque O et la courbe d'intersection d'une sphère et d'une surface du second ordre, le cône qui a pour sommet le point O et pour directrice la courbe donnée coupe la sphère suivant une

deuxième courbe située, comme la première, sur une infinité de surfaces du second ordre.

Cela posé, on demande de démontrer que les axes de chacune de ces nouvelles surfaces sont parallèles aux normales qu'on peut mener en O aux trois *anallagmatiques* du quatrième ordre, passant par ce point, qui ont pour *focale* la courbe donnée.

MOUTARD.

729 (**1865**, 142). — Les directions des axes de la section faite par le plan

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \lambda,$$

dans la surface

$$\begin{aligned} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0, \end{aligned}$$

sont données par les intersections du plan

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$$

avec le cône

$$\begin{aligned} &(A\cos^2\beta + A'\cos^2\alpha - 2B''\cos\alpha\cos\beta)(x^2\sin^2\beta - y^2\sin^2\alpha) \\ +&(A\cos^2\gamma + A''\cos^2\alpha - 2B'\cos\alpha\cos\gamma)(z^2\sin^2\alpha - x^2\sin^2\gamma) \\ +&(A'\cos^2\gamma + A''\cos^2\beta - 2B\cos\beta\cos\gamma)(y^2\sin^2\gamma - z^2\sin^2\beta) = 0. \end{aligned}$$

J.-J.-A. MATHIEU.

ERRATUM.

1916, page 466, ligne 9, en remontant, *au lieu de* indescriptible, *lire* inscriptible.

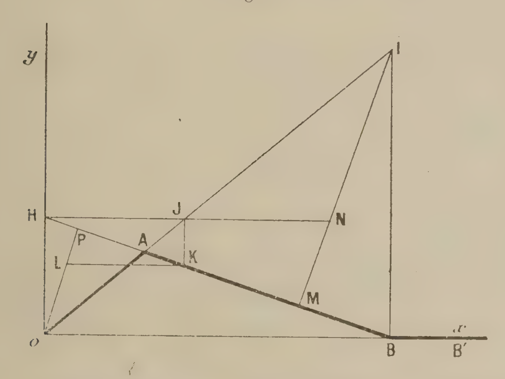
[R1e]

SUR LE MOUVEMENT DE LA MANIVELLE ET DE LA TIGE GUIDÉE;

Par M. d'OCAGNE.

Soit BB′ (*fig.* 1) une tige guidée, glissant le long de Ox, dont l'extrémité B est reliée au bouton A de la


Fig. 1.



manivelle OA tournant autour de O avec une vitesse angulaire ω constante. Il s'agit de trouver *le maximum de la vitesse du point* B. Ce problème est résolu analytiquement dans l'excellent *Cours de Mécanique* de M. Lecornu (t. I, p. 182). Le savant auteur aboutit (p. 183) à une équation du troisième degré de forme assez compliquée dont il indique, au reste, une solution approchée pour le cas, conforme aux dispositions de la pratique, où la longueur de la bielle atteint cinq fois environ celle de la manivelle.

Je me propose de faire connaître ici une solution géométrique du même problème qui, grâce à un choix différent de l'inconnue (l'inclinaison de la bielle au lieu de celle de la manivelle sur la tige), aboutit à un résultat de forme très simple. J'emploie d'ailleurs les mêmes notations que M. Lecornu en posant

$$\text{OA} = r, \qquad \text{AB} = l, \qquad \frac{\text{OA}}{\text{AB}} = e, \qquad \text{ABO} = \varphi$$

et représentant par v la vitesse du point B.

Si l'on prend le centre instantané I de AB, à la rencontre de OA et de la perpendiculaire élevée en B à OB, on a immédiatement, puisque la vitesse de A est $r\omega$,

$$\frac{v}{r\omega} = \frac{\text{BI}}{\text{AI}};$$

d'où, si AB coupe Oy en H,

$$v = \text{OH}\,\omega,$$

résultat depuis longtemps classique. Puisque ω est constant, le maximum de v a lieu en même temps que celui de OH, c'est-à-dire pour la position telle que la différentielle $d(\text{H})$ du déplacement de H sur Oy s'annule.

Si la normale en H au lieu que décrit ce point (perpendiculaire en H à Oy) coupe en N la normale à l'enveloppe de AB (perpendiculaire abaissée de I sur AB), on a, en vertu d'une formule bien connue,

$$\frac{d(\text{H})}{d(\text{A})} = \frac{\text{HN}}{\text{AI}}$$

ou, en remplaçant $d(\text{A})$ par sa valeur $r\omega\,dt$,

$$d(\text{H}) = \frac{\text{OA}.\text{HN}}{\text{AI}}\,\omega\,dt.$$

Tirons la perpendiculaire JK à Ox. La figure OHJK est homothétique de IBOH pour le pôle A, le rapport d'homothétie étant $\frac{OA}{AI}$. Si donc nous menons OP perpendiculaire à AB, puis KL perpendiculaire à Oy, ces deux lignes, prises dans la première figure, sont homologues respectivement de OH et HN, prises dans la seconde, et nous avons

$$\frac{KL}{HN} = \frac{OA}{AI},$$

ce qui montre que

$$d(H) = KL.\omega\, dt.$$

On déduit immédiatement de là que l'accélération du point B, donnée par $\frac{d(H)}{dt}\omega$, est égale à $KL\omega^2$, résultat établi d'une autre façon dans mon Cours de Géométrie de l'École Polytechnique (*voir* notamment les *Feuilles autographiées* de la deuxième division 1912-1913, p. 494). Mais, pour l'objet qui nous occupe ici, il suffit de remarquer que *la position correspondant au maximum de* v, pour laquelle, nous venons de le dire, $d(H) = 0$ *est celle qui est telle que* $KL = 0$, *c'est-à-dire telle que le point* K *se confonde avec le pied* P *de la perpendiculaire abaissée de* O *sur* AB.

Refaisons la figure dans cette hypothèse (*fig.* 2). Nous avons immédiatement

$$\frac{OJ}{BH} = \frac{OA}{BA} = e.$$

Or

$$BH = \frac{x}{\cos\varphi}, \qquad OH = x\,\text{tang}\,\varphi, \qquad HJ = x\sin^2\varphi,$$

$$OJ = \sqrt{\overline{OH}^2 + \overline{HJ}^2} = x\,\text{tang}\,\varphi\sqrt{1+\sin^2\varphi\cos^2\varphi}.$$

L'égalité précédente devient donc

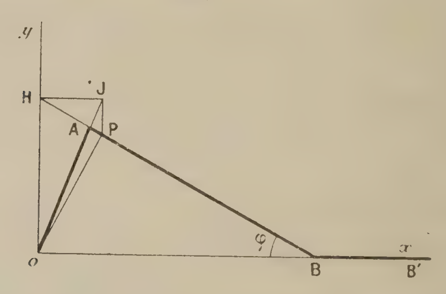
$$\sin\varphi\sqrt{1+\sin^2\varphi\cos^2\varphi}=e,$$

ou

$$\sin^2\varphi+\sin^4\varphi-\sin^6\varphi=e^2.$$

Telle est l'équation qui résout le problème. Il suffit de remarquer que, si φ_0 est l'inclinaison de la bielle

Fig. 2.



sur la tige lorsque la manivelle est perpendiculaire à cette tige (valeur maximum de φ), on a $\sin\varphi_0=e$, pour que cette équation prenne la forme peut-être plus frappante

$$\sin^2\varphi+\sin^4\varphi-\sin^6\varphi=\sin^2\varphi_0.$$

Posant $\sin^2\varphi=z$ et $\sin^2\varphi_0=z_0$, on voit que l'équation à résoudre pour avoir le maximum peut s'écrire

$$z^3-z^2-z+z_0=0,$$

équation de forme très simple dont il est aisé d'obtenir (soit par les procédés d'approximation connus, soit par nomogramme) l'unique racine comprise entre 0 et 1.

Pour avoir la valeur correspondante de v donnée, comme on l'a vu plus haut, par $OH\omega$, il suffit de calculer celle de OH, donnée elle-même par

$$OH=x\operatorname{tang}\varphi.$$

Tout revient donc à calculer x (c'est-à-dire OB de la figure 2), en fonction de φ. Or, on a immédiatement

$$\frac{AB}{OB} = \frac{AH}{HJ} = \frac{BH}{OB + HJ},$$

ou

$$\frac{l}{x} = \frac{\frac{x}{\cos\varphi}}{x + x\sin^2\varphi},$$

d'où

$$x = l\cos\varphi(1 + \sin^2\varphi)$$

et, par suite,

$$OH = l(\sin\varphi + \sin^3\varphi).$$

[K'7c]

QUELQUES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES FOYERS, DES TANGENTES, ETC.;

Par M. F. GONSETH,
Assistant à l'École Polytechnique fédérale de Zurich.

1. Les groupes de n droites, d'un faisceau de centre F, qui sont *apolaires* à une paire de droites d_1 et d_2 du faisceau, forment une *involution* (système linéaire de dimension 1). On les obtient tous en considérant d_1 et d_2 comme deux groupes de n droites confondues et en formant le système linéaire que ces deux premiers déterminent. Je supposerai, dans la suite, que la paire d_1 d_2 est *isotrope*. On sait, en pareil cas ([1]), que les *paires* qui lui sont apolaires (ou harmoniques) sont rectangulaires.

([1]) Laguerre, *Note sur les foyers* (*Nouvelles Annales*, 1853).

L'involution des groupes apolaires à la paire $d_1\ d_2$ n'est pas modifiée par toute transformation projective du plan qui laisse cette dernière intacte, d'après ce qui précède. En particulier l'involution des apolaires à la paire isotrope de F ne sera pas modifiée par une rotation quelconque du plan autour de F. Par conséquent *les groupes de cette involution s'obtiennent par la rotation de l'un d'entre eux* (rotation réelle ou imaginaire).

D'autre part, un groupe g est univoquement déterminé par une des droites qui le composent. Soient d_1, d_2, ..., d_n ces dernières (les indices indiquant l'ordre dans lequel elles sont rencontrées par une droite mobile tournant dans un sens constant autour de F). Je fais tourner le groupe g jusqu'à ce que d_1 vienne en d_2; le groupe dans cette nouvelle position fait encore partie de l'involution et, comme il a la droite d_2 en commun avec le groupe g primitif, il coïncide avec celui-ci. Donc l'angle $d_2\ d_3$ est égal à l'angle $d_1\ d_2$. En définitive :

L'involution des groupes de n droites d'un faisceau apolaires à la paire isotrope du faisceau est formée des groupes qui divisent le plan en $2\,n$ parties égales (involution absolue, du $n^{\text{ième}}$ ordre).

2. Un foyer F d'une courbe plane algébrique Γ_n, de $n^{\text{ième}}$ classe, est, par définition, à l'intersection de deux tangentes isotropes. Or les groupes de n droites conjuguées à Γ_n, autour de F, forment un système linéaire auquel on peut parvenir en considérant chaque tangente comme un groupe de n droites conjuguées confondues, et en formant le système linéaire de groupes déterminé par ces n premiers. Par conséquent, d'après ce qui précède :

La condition nécessaire et suffisante, sous forme réelle, pour qu'un point F *soit foyer d'une courbe plane algébrique* Γ_n *de* $n^{\text{ième}}$ *classe, est que le système linéaire des groupes de n droites conjuguées, autour de* F, *contienne l'involution absolue de* $n^{\text{ième}}$ *ordre.*

Par commodité, je nommerai *régulier* tout groupe d'une involution absolue.

3. Soit, réciproquement, g un groupe régulier de n droites; il admet la paire isotrope du faisceau comme *paire apolaire*. Par conséquent les groupes, de $n-1$ droites, polaires premiers des droites du faisceau sont eux aussi apolaires à la paire isotrope, donc réguliers; de même :

Le groupe polaire, suivant g, d'un groupe quelconque de p droites est un groupe régulier de n — p droites (s'il n'est pas indéterminé).

De ceci résulte immédiatement :

Si P *est un point d'où les tangentes menées à une courbe de* $n^{\text{ième}}$ *classe* Γ_n *forment un groupe régulier, les tangentes menées de* P *à la polaire mixte, suivant* Γ_n, *d'un groupe quelconque de droites par* P *formeront, elles aussi, un groupe régulier.*

Examinons particulièrement le cas où $n = 3$. Deux courbes de troisième classe, Γ_1 et Γ_2, étant fixées, le lieu des points, P, d'où les tangentes à l'une et à l'autre forment deux groupes apolaires est, comme on sait, une courbe de troisième ordre, C_3. Il est d'ailleurs facile de s'en assurer : si un point M décrit une droite d, les groupes de tangentes menées de M à Γ_1 forment une

série, d'ordre 3, de courbes de troisième ordre (dégénérées), et si M doit venir en un point P, il faut soumettre les courbes de cette série à une condition linéaire.

Je suppose que Γ_2 se réduise à trois points non en ligne droite, A, B, C. La courbe C_3 passe alors par ces trois points. Déplaçons C jusqu'en C'; C_3 devient C'_3; ces deux courbes ont en commun les points A et B, et sept autres. De chacun, R, de ces derniers, les trois tangentes menées à Γ_1 forment un groupe apolaire aux deux groupes RA, RB, RC; et RA, RB, RC', c'est-à-dire apolaire à la paire RA, RB.

Je suppose enfin que A et B soient les *ombilics* du plan. D'après ce qui précède, les trois tangentes menées de R à Γ_1 forment un groupe régulier. Ces sept points peuvent être tous distincts et réels, comme, par exemple, dans le cas où Γ_1 est réduite à trois points. En définitive :

Il existe sept points d'où les tangentes menées à une courbe générale de troisième classe forment un groupe régulier.

Par ces sept points passent une double infinité de cubiques, qui coupent la droite de l'infini suivant un système linéaire, de dimension 2, de groupes de trois points. Ces groupes sont tous apolaires au groupe des trois points triples; les ombilics forment la *paire neutre*. Par conséquent : *Par ces sept points passent trois courbes de troisième ordre qui osculent la droite de l'infini; les trois directions d'osculation forment un groupe régulier.*

Nous avons vu plus haut que les coniques polaires, suivant Γ_1, des droites passant par un point R sont toutes vues de ce point sous un angle droit. *Supposons*

que Γ_1 *se réduise aux trois points* ABC. Soient A_1, B_1, C_1 les projections du point R depuis les sommets du triangle ABC sur les côtés opposés, et A_2, B_2, C_2 les harmoniques de A_1, B_1, C_1 suivant les paires de sommets du même triangle. Il n'est pas difficile de voir que les coniques polaires (suivant notre Γ_1 dégénérée) des droites passant par R forment un faisceau qui contient les paires AA_2, BB_2 et CC_2 comme coniques dégénérées. Les cercles orthoptiques de toutes ces coniques, en particulier, les cercles construits sur AA_2, ..., comme diamètres, passent par R.

Enfin, *si le triangle* ABC *est équilatéral*, *tout point du cercle circonscrit jouit des mêmes propriétés.*

4. Nous avons rencontré au paragraphe précédent un système linéaire de groupes de trois points, de dimension 2, sur la droite de l'infini, et dont les ombilics forment la paire neutre. Ce système peut être examiné plus soigneusement. Je le projette depuis un point arbitraire. D'après ce qui précède, *tous les groupes de trois droites obtenus sont apolaires à un groupe régulier; la paire isotrope est apolaire à ce dernier et la paire polaire de toute droite d du faisceau est rectangulaire.* Voici comment, d étant donnée, sa paire polaire s'en déduit : soient d_1, d_2, d_3 les droites du groupe fondamental régulier; les trois paires formées d'une droite d_i et de la symétrique de d suivant d_i ont mêmes bissectrices; celles-ci forment la paire polaire de d. On en déduit :

a. La somme algébrique des angles que forment, avec une des fondamentales d_i, une droite d et les droites de son groupe polaire est égale à $\frac{\pi}{2}$ (indépendante de d).

b. La somme algébrique des angles que forment avec d_i les trois droites d'un groupe du système est égale à zéro.

Ce système mériterait donc le nom de *système symétrique du troisième ordre*, de même qu'on nomme *involution symétrique* (de second ordre) le système des harmoniques à une paire rectangulaire.

Je veux maintenant faire voir que *les directions asymptotiques de toutes les cubiques qui passent par les sommets, l'orthocentre et les trois pieds des hauteurs d'un triangle, forment un système symétrique de troisième ordre.*

Soient A, B, C, D les quatre sommets d'un quadrangle et L, M, N ses points diagonaux. Par ces sept points passent une double infinité de cubiques qui coupent une droite arbitraire, d, suivant un système linéaire de groupes de trois points, de dimension 2. Je me propose de rechercher la paire neutre de ce système. Dans ce but, d'un point P quelconque, je mène les tangentes aux coniques du faisceau passant par A, B, C, D. Les points de contact sont sur une cubique (la correspondante de P) qui passe par P et les sept points sus-mentionnés. (Il n'est pas difficile de voir que toute cubique passant par ces sept points peut être obtenue de la sorte.) Je suppose que P soit quelconque sur d; deux coniques du faisceau touchent d, en F_1 et F_2; ces points appartiennent à la cubique correspondante de tout point de d et par conséquent ils forment la paire neutre cherchée.

Si maintenant les quatre points A, B, C, D sont les trois sommets d'un triangle et son orthocentre, les points L, M, N en sont les pieds des hauteurs; si

enfin d est à l'infini, les points F_1 et F_2 sont les ombilics du plan, ce qui démontre l'affirmation.

Je nomme *équilatère* une cubique dont les trois asymptotes forment un triangle équilatéral. Sur toute droite le système des groupes de trois points conjugués à une cubique possède une paire neutre. Cette paire, pour une cubique équilatère, et sur la droite de l'infini, est naturellement formée des ombilics. Elle est d'autre part harmonique aux coniques polaires de tout point de la droite de l'infini, qui forment donc un faisceau d'hyperboles équilatères. Les points-bases de ce faisceau sont les quatre pôles de la droite de l'infini. Par conséquent :

Les quatre pôles, suivant une cubique équilatère, de la droite de l'infini, sont les sommets et l'orthocentre d'un triangle.

5. Voici comment sera caractérisé *le système symétrique du $n^{ième}$ ordre,* c'est-à-dire le système linéaire des groupes de n droites apolaires au groupe régulier $d_1 \ldots d_n$.

Tout groupe polaire est régulier.

Je nomme α l'angle dont doit tourner, dans le sens positif, une droite arbitraire d, jusqu'à ce qu'elle rencontre une première droite fondamentale. d rencontrera une première droite de son groupe polaire après une rotation de $\frac{n}{n-1}\alpha$.

On en déduit :

La somme algébrique des angles que forment, avec une direction fondamentale d_i, k droites arbi-

traires et les $n-k$ droites de leur groupe polaire mixte est égale à $(n-1-k)\frac{\pi}{2}$ (indépendante des k premières droites).

En particulier *la somme algébrique des angles que forment, avec une direction fondamentale, les n droites d'un groupe est égale à zéro.* En d'autres termes, et en faisant usage d'une expression due à Laguerre : *Les groupes d'un système symétrique ont une orientation nulle par rapport à toute droite du groupe régulier fondamental.*

Par les $2n$ points d'intersection d'une courbe de $n^{\text{ième}}$ ordre et d'un cercle passent une infinité de dimension $N(n-2)+1$ de courbes de $n^{\text{ième}}$ ordre. On vérifie aisément que ces courbes coupent une droite arbitraire suivant un système linéaire de groupes de n points, de dimension $n-1$ seulement; la droite de l'infini, en particulier, suivant un pareil système dans lequel les ombilics forment une paire neutre et par conséquent :

Les directions asymptotiques de toutes les courbes de $n^{\text{ième}}$ ordre, qui passent par les points d'intersection de l'une d'entre elles et d'un cercle, forment un système symétrique du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Le cas particulier où $n=2$ est bien connu.

[K'1]

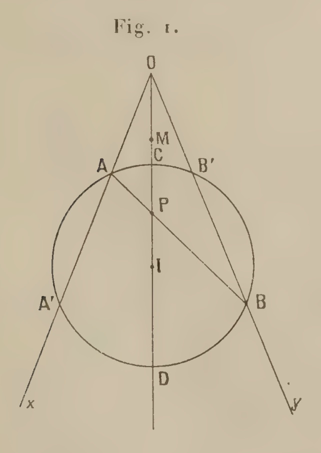
SUR LE PROBLÈME DE PAPPUS GÉNÉRALISÉ ;

Par M. J. LEMAIRE.

Il s'agit du problème suivant : *Mener par un point* P *de la bissectrice d'un angle* $\widehat{XOY}$ *une droite sur laquelle les côtés de l'angle, ou leurs prolongements, interceptent un segment de longueur donnée* l. M. Joffroy a donné récemment (*N. A.*, 1916, p. 168) une solution de cette question. En voici une autre :

Supposons le problème résolu; soit une droite passant en P, coupant OX en A, OY en B, et telle

Fig. 1.



que $AB = l$; traçons le cercle passant en A et B et ayant son centre I sur OP; il coupe les côtés de l'angle

en A′ et B′ et la bissectrice en C et D. Les points O, P, C, D forment une division harmonique, et si M est le milieu de OP, on a

$$\overline{MO}^2 = \overline{MC}.\overline{MD} = \overline{MI}^2 - r^2,$$

r désignant le rayon du cercle; d'ailleurs, si l'on appelle ω l'angle $\widehat{XOY}$,

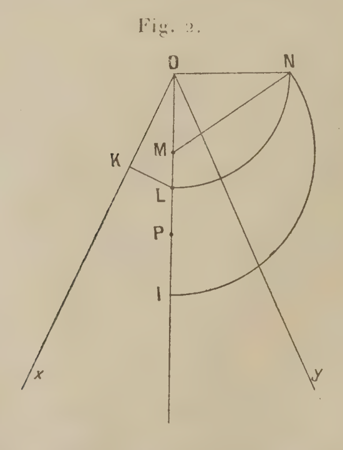
$$2r = \frac{AB}{\sin\widehat{AA'B}} = \frac{l}{\cos\frac{\omega}{2}};$$

ces deux relations déterminent r et MO et conduisent à la construction suivante : sur OX prenons $OK = \frac{l}{2}$, la perpendiculaire en K à OX coupant OP en L nous avons

$$OL = \frac{l}{2\cos\frac{\omega}{2}} = r;$$

menons en O une droite ON perpendiculaire à OP et

Fig. 2.



égale à OL, portons sur MP une longueur égale à MN,

nous obtenons le point I; il ne reste plus qu'à décrire la circonférence de centre I et de rayon r pour obtenir les droites AB et A′B′ symétriques par rapport à OP et répondant à la question; la discussion de cette construction est des plus simples et conduit à la condition

$$l \geqq 2\,\mathrm{OP}\,\mathrm{tang}\,\frac{\omega}{2}.$$

Il existe aussi deux droites passant en P, sur chacune desquelles l'un des côtés de l'angle $\widehat{\mathrm{XOY}}$ et le prolongement de l'autre interceptent un segment égal à l; la construction est analogue à la précédente, mais toujours possible.

[C2j]

SUR LE CALCUL APPROCHÉ DES QUADRATURES;

Par M. J. HAAG.

1. Imaginons qu'on ait calculé une intégrale définie

$$\mathrm{I} = \int_a^b f(x)\,dx$$

par *la méthode des trapèzes*, en prenant comme base commune à tous les trapèzes une quantité très petite h. Considérant cette quantité comme infiniment petit principal, proposons-nous de calculer *la partie principale de l'erreur commise*.

Soit $(x, x+h)$ la base d'un des trapèzes. L'erreur commise sur ce trapèze est, en désignant par $\mathrm{F}(x)$ une

primitive de $f(x)$,

$$\varepsilon = \mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x) - \frac{h}{2}[f(x)+f(x+h)] = -\frac{h^3}{12}f''(x)+\ldots,$$

les termes non écrits étant de degré au moins égal à 4.

L'erreur totale est

$$e = \Sigma\varepsilon = -\frac{h^3}{12}\Sigma f''(x) + \ldots.$$

Un infiniment petit équivalent à e est donc

$$e' = -\frac{h^3}{12}\Sigma f''(x) = -\frac{h^2}{12}\Sigma hf''(x).$$

Or, lorsque h tend vers zéro, $\Sigma hf''(x)$ tend vers

$$\int_a^b f''(x)\,dx,$$

c'est-à-dire $f'(b) - f'(a)$. Il s'ensuit *que la partie principale de e', donc de e, est*

$$\frac{h^2}{12}[f'(a) - f'(b)].$$

Si, à la valeur approchée calculée I', on ajoute cette quantité, très facile à évaluer, *l'erreur commise ne sera plus que du troisième ordre, au lieu d'être du second.*

2. Supposons maintenant que l'intégrale I soit calculée par la *méthode de Simpson*. L'intégrale relative à l'intervalle $(x, x+h)$ est remplacée, comme on sait, par

$$\frac{h}{6}\left[f(x) + 4f\left(x+\frac{h}{2}\right) + f(x+h)\right].$$

L'erreur commise est

$$\varepsilon = \mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}(x) - \frac{h}{6}\left[f(x) + 4f\left(x+\frac{h}{2}\right) + f(x+h)\right].$$

En développant par la formule de Taylor, on trouve que le premier terme non nul est $-\frac{h^5}{2880}f^{(4)}(x)$. L'erreur totale est donc un infiniment petit équivalent à

$$-\frac{h^4}{2880}\Sigma h f^{(4)}(x)$$

ou à

$$-\frac{h^4}{2880}\int_a^b f^{(4)}(x)\,dx = -\frac{h^4}{2880}[f'''(b)-f'''(a)].$$

Telle est la partie principale de l'erreur. Si on l'ajoute à l'intégrale approchée I', *l'erreur commise n'est plus que du cinquième ordre.*

CORRESPONDANCE.

M. **G. Fontené.** — *Sur l'utilité des grandeurs directives.* — Dans la démonstration qu'il a donnée des formules d'Euler $d^2 = R^2 \mp 2Rr$, M. Gambier a eu soin, pour ce qui concerne la formule $d^2 = R^2 + 2Rr$, de donner deux démonstrations : l'une en considérant le centre du cercle exinscrit comme situé sur la bissectrice d'un angle du triangle, l'autre en considérant ce point comme situé sur la bissectrice d'un angle extérieur; cela est essentiel, en effet, pour établir la réciproque, le sommet A d'où l'on part pouvant être ou n'être pas, selon la position qu'on lui a donnée, sommet de l'angle du triangle dans lequel le cercle I sera exinscrit. (*N. A.*, 1914, p. 366.)

M. Montel a donné (*N. A.*, 1915, p. 57) une dé-

monstration de la relation qui lie d, R et r dans le cas du quadrilatère. Pour le cas où le cercle I est exinscrit au quadrilatère ABCD, il existe les mêmes raisons d'établir de plusieurs manières la relation en question.

Il faut souhaiter que l'usage des grandeurs directives fasse un jour disparaître ces démonstrations multiples. On me permettra de rappeler que, dans un opuscule ayant pour titre *Géométrie dirigée* (¹), j'ai résumé ce qu'il est essentiel de connaître dans cet ordre d'idées.

M. **R. Goormaghtigh**. — *Sur une question de Cinématique.* — Le théorème énoncé par M. Faucheux (*Nouvelles Annales*, 1917, p. 60) peut être généralisé ainsi :

Si un mobile décrit une trajectoire plane de telle façon que, pour chaque position, la droite qui divise les deux premiers rayons de courbure de la trajectoire dans des rapports constants donnés contienne l'extrémité de l'accélération, la vitesse v *est liée au rayon de courbure* ρ *de la trajectoire par une relation de la forme* $v = \alpha\rho\sqrt{\rho^{\lambda} + \beta}$, *où* α, β, λ *désignent des constantes.*

Dans le cas considéré par M. Faucheux, β est nul et la relation entre v et ρ a la forme $v = \alpha\rho^{\mu}$.

M. **J. Lemaire**. — *Sur une Note de M. Barisien.* — Dans cette Note (1916, p. 466), l'auteur donne *deux hyperboles* pour le lieu des points équidistants de deux cercle O et O'. Cela n'est vrai que pour deux cercles extérieurs : ce lieu est le même que le lieu des

(¹) Librairie Nony, 1897.

centres des cercles tangents aux deux cercles, et sa nature dépend de la position relative des deux cercles :

1° *Si les cercles sont extérieurs*, le lieu se compose bien de *deux hyperboles* ayant pour foyers les centres O et O′ des cercles donnés : pour l'une, l'axe focal est égal à la différence des rayons; pour l'autre, à la somme des rayons. La première de ces hyperboles est le lieu des centres des cercles ayant avec les cercles donnés des contacts de même espèce; la deuxième est le lieu des centres des cercles ayant avec les cercles donnés des contacts d'espèce différente.

2° *Si les cercles sont sécants*, le lieu se compose d'*une hyperbole et d'une ellipse* ayant O et O′ pour foyers, et passant aux points communs aux deux cercles : l'hyperbole, dont l'axe focal est égal à la différence des rayons, est le lieu des centres des cercles ayant avec les cercles donnés des contacts de même espèce; l'ellipse, dont l'axe focal est égal à la somme des rayons, est le lieu des centres des cercles touchant l'un des cercles donnés extérieurement, et l'autre intérieurement.

3° *Si l'un des cercles est intérieur à l'autre*, le lieu se compose de *deux ellipses* de foyers O et O′ : l'une, dont l'axe focal est égal à la différence des rayons, est le lieu des centres des cercles tangents intérieurement à chacun des cercles donnés; l'autre, dont l'axe focal est égal à la somme des rayons, est le lieu des centres des cercles tangents intérieurement à l'un des cercles donnés, extérieurement à l'autre.

4° *Si les deux cercles sont tangents*, le lieu se réduit à la droite des centres et à une hyperbole ou une ellipse suivant que les cercles se touchent extérieurement ou intérieurement.

Si l'un des cercles se réduit à un point, le lieu est, comme on sait, une hyperbole ou une ellipse suivant que ce point est extérieur ou intérieur au cercle restant : les deux hyperboles ou les deux ellipses du premier ou du troisième cas se confondent dans ce cas particulier.

Si l'un des cercles devient une droite, le lieu se compose de deux paraboles ayant pour foyer le centre du cercle restant.

Dans tous les cas, chaque conique du lieu passe aux points communs, réels ou imaginaires, aux deux cercles donnés, même si les rayons de ces cercles deviennent nuls ou infinis.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1503.

(1884, p. 447.)

L'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} - xy = 0$$

est donnée par la formule

$$y = \sum \mathrm{A} \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^m}{m}} (e^{\alpha x} + e^{\alpha\theta x} + e^{\alpha\theta^2 x} + \ldots + e^{\alpha\theta^{m-1} x})\, dx,$$

dans laquelle θ *doit être remplacée par les* m *racines de l'équation*

$$\theta^m - 1 = 0$$

Catalan.

SOLUTION
Par M. H. BROCARD.

D'après une Note *Sur une classe d'équations différenrentielles*, parue aux *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 1886, Catalan a déclaré avoir rencontré cette question depuis quelques années, et c'est ainsi qu'il a été amené à la proposer en 1884.

L'énoncé ci-dessus en est tiré à peu près textuellement.

Ceci pourra donc servir de réponse provisoire.

Dans le même article, Catalan a annoncé avoir reçu de M. de Tilly une lettre du 4 juillet 1886 lui affirmant qu'il savait intégrer l'équation

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \mathrm{A} x^m y,$$

m étant quelconque.

J'ignore s'il en a été publié quelque démonstration.

1510.

(1884, p. 495.)

La conique inscrite au triangle ABC *touche les côtés* BC, CA, AB *aux points* A′, B′, C′. *Les milieux* a, b, c *des côtés* BC, CA, AB *ont des polaires relatives à la conique inscrite; ces polaires forment un autre triangle dont l'aire est égale à l'aire du triangle* ABC.

H. SCHRÖTER.

SOLUTION
Par M. R.-S. DE BEIRES.

En représentant par S l'aire du triangle ABC, et par Σ l'aire du triangle formé par les polaires des milieux a, b, c, on a (SALMON, *Sections coniques*, p. 371-600) :

$$\mathrm{S} = a_1 b_1 \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\beta - \gamma)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma - \alpha),$$

$$\Sigma = \frac{a_1^2 b_1^2 (abc)}{4(aob)(boc)(coa)},$$

a_1 et b_1 désignant les axes de la conique inscrite; α, β et γ les angles excentriques correspondant aux points de con-

tact A′, B′, C′, et (aob) l'aire du triangle qui a pour sommets les points a, b et le centre o de la conique.

Mais on sait que

$$S = 4(abc),$$

$$a_1 b_1 \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 4(aob),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

donc

$$S = \Sigma.$$

C. Q. F. D.

2235.

(1915, p. 65.)

Soient A, B, C, D *les pieds des normales, issues d'un point* P, *à une ellipse d'axes* Ox *et* Oy. *Les points* B, C, D *et le point* A′, *diamétralement opposé sur l'ellipse au point* A, *sont sur un cercle dit « cercle de Joachimsthal ». Démontrer que le centre de ce cercle peut être obtenu par la construction suivante : Soient* α *et* β *les points de rencontre de la normale en* A *avec les axes* Ox *et* Oy, M *le point d'intersection des perpendiculaires élevées par ces points aux axes*, M_1 *le symétrique de* M *par rapport à* O; *le centre cherché est le milieu du segment* M_1P.

Ce théorème résulte de l'équation du cercle de Joachimsthal mise sous une forme convenable. F. Balitrand.

Deuxième Solution (*voir* 1917, p. 37).
Par M. R. Bouvaist.

On sait que si le point P décrit la normale en A à l'ellipse considérée, les côtés du triangle CBD enveloppent une parabole (π) tangente aux axes Ox et Oy, la polaire réciproque de cette parabole par rapport à l'ellipse donnée sera une hyperbole d'Apollonius (H), telle qu'il existera une infinité de triangles inscrits à (H) et circonscrits à l'ellipse donnée (E). Or (H) étant harmoniquement circonscrite à (E) et les asymptotes de (E) formant faisceau harmonique avec celles de (H), il faut et il suffit, pour qu'il existe une infinité de triangles inscrits dans (H) et circonscrits à (E), que le centre de (H) soit sur (E). L'hyperbole d'Apollonius (H) relative à un point Q est le lieu des points μ tels que leurs polaires soient perpendiculaires à μQ; soit ω le centre de (H), (H) passe par O′

symétrique de O par rapport à ω, et Q sera la perpendiculaire abaissée de O′ sur la tangente à (E) en ω; si d'autre part Q_1 et Q_2 sont les projections de Q sur Ox et Oy, Q_1Q_2 est un diamètre de (H), il s'ensuit que Q_1 et Q_2 sont les points d'intersection de Ox et Oy avec la normale à (E) en ω. La corde de contact de la parabole (π) avec Ox et Oy sera la tangente en ω à (E), le point ω se confondra donc avec le point A′ diamétralement opposé à A sur (E) et le point Q se confondra avec le point M_1 de l'énoncé. Les tangentes à (E) en B, C, D se coupent sur (H) en β, γ, δ, et les perpendiculaires abaissées de β sur CD, γ sur BD, δ sur CD se couperont en (M_1), et les deux points P et M_1 seront deux points inverses du triangle $\beta\gamma\delta$, le centre du cercle BCD sera donc le milieu de PM_1. Ce qui démontre la proposition énoncée.

Remarque. — Nous pouvons énoncer la propriété suivante :

Soient A, B, C, D *les pieds des normales issues d'un point* P *à une conique* (E), A′ *le symétrique de* A *par rapport au centre* O *de* (E); *la normale en* A′ *coupe les axes de* (E) *en* α *et* β, *les perpendiculaires élevées en ces points aux axes se coupent en* M, *le cercle de Joachimsthal* BCDA′ *passe par les pieds des perpendiculaires abaissées de* M *sur les tangentes à* (E) *en* B, C, D.

2239.

(1915, p. 56.)

On donne deux points A, B, *sur chacun des axes de coordonnées rectangulaires.*

Soient AM *et* BM *deux droites menées jusqu'à l'axe opposé et* P *leur intersection, de telle sorte qu'on ait la relation*

$$\frac{1}{AP}+\frac{1}{PM}=\frac{1}{BP}+\frac{1}{PN}.$$

1° *Démontrer que le lieu de* P *est une strophoïde.*

2° *Les tangentes en* A *et* B *sont parallèles à son asymptote réelle.*

3° *Les tangentes menées de* A *à la courbe sont égales à* OA, O *étant l'origine des coordonnées.*

4° *L'aire de la boucle est représentée par l'expression*

$$\frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)^3}\left[4(a^4-b^4)+8ab(a^2-b^2)\log\frac{a-b}{a+b}\right.$$
$$\left.-(a^4-6a^2b^2+b^4)\pi\right].$$

5° *Examiner le cas particulier où $a=b$.* T. Ono.

SOLUTION

Par M. R. Bouvaist.

Prenons le point O comme centre d'inversion, la puissance d'inversion étant K; soient A′, B′, P′, M′, N′ les inverses des points A, B, P, M, N.

1° Nous aurons

$$\frac{1}{AP}=\frac{OA'.OP'}{K^2.A'P'},\qquad \frac{1}{MP}=\frac{OM'.OP'}{K^2.M'P'},$$

d'où

$$\frac{1}{AP}+\frac{1}{MP}=\frac{OP'}{K^2}\left(\frac{OA'.M'P'+OM'.A'P'}{A'P'.P'M'}\right)=\frac{\overline{OP'}^2}{K^2}\,\frac{1}{P'H_1},$$

H_1 étant le pied de la perpendiculaire abaissée de P′ sur A′M′; nous aurons de même

$$\frac{1}{BP}+\frac{1}{NP}=\frac{\overline{OP'}^2}{K^2}\,\frac{1}{P'H_2},$$

d'où

$$P'H_1=P'H_2;$$

or les angles $\widehat{P'M'A'}$, $\widehat{P'B'M'}$ sont égaux à $\widehat{P'OA'}$, donc

$$P'M'=P'B';$$

le point P′ est donc à l'intersection du cercle OA′M′ avec la perpendiculaire à OM′ au milieu μ du segment B′M′. Soient α le milieu de OA′, β le milieu de OB′, ω l'intersection des parallèles à OA′ et OB′ menées par β et α, C le centre du cercle OA′B′, p' la projection de P′ sur $\alpha\omega$. Nous avons

$$OM'=2\alpha C,\qquad M'B'=2\alpha C-OB',$$

$$\mu\beta'=\alpha C-\frac{OB'}{2},\qquad \beta\mu=\alpha C$$

et

$$\overline{P'p'}^2 = \overline{CA'}^2 - \overline{Cp'}^2 = \overline{\alpha C}^2 + \frac{\overline{OA'}^2 - \overline{OB'}^2}{4},$$

d'où

$$\overline{P'p'}^2 - \overline{\mu\beta}^2 = \frac{\overline{OA' - OB'}^2}{4}.$$

Le lieu du point P′ est donc une hyperbole équilatère (H) ayant pour axes $\omega\alpha$ et $\omega\beta$ et passant par A′, O, B′. Le lieu du point P sera donc une strophoïde ayant pour point double O, les tangentes en ce point étant les bissectrices des axes, passant par A et B, admettant comme direction asymptotique réelle la droite OD, D étant le milieu de AB, et ayant pour sommet le pied S de la perpendiculaire abaissée de O sur AB.

2° Dans l'hyperbole (H′) les tangentes en A′ et B′ sont antiparallèles à la tangente en O; dans la strophoïde les tangentes en A et B sont donc parallèles à l'asymptote.

3° Soient S'_1 et S'_2 les sommets de (H) situés sur l'axe transverse $\omega\beta$, les longueurs des tangentes issues de B à la strophoïde sont les inverses des longueurs $B'S'_1$, $B'S'_2$; si S_1 et S_2 désignent les contacts de ces tangentes, nous aurons

$$BS_1 = B'S'_1 \frac{K^2}{OB'.OS'_1}, \qquad BS_2 = B'S'_2 \frac{K^2}{OB'.OS'_2},$$

d'où

$$BS_1 = BS_2 = \frac{K^2}{OB'} \doteq OB.$$

4° Si nous prenons le sommet S de la strophoïde pour origine, la droite orientée SO comme axe polaire, et si nous posons

$$SO = d, \qquad \widehat{DOS} = \theta,$$

l'équation polaire de la strophoïde sera

$$\rho = d\,\frac{\sin\dfrac{\theta - \omega}{2}}{\sin\dfrac{\theta + \omega}{2}}$$

et l'aire de boucle est égale à

$$\frac{d^2}{2}\int_0^\pi \frac{\sin^2\frac{\theta-\omega}{2}}{\sin^2\frac{\theta+\omega}{2}}\,d\omega$$

$$= \frac{d^2}{2}\left(\pi\cos2\theta + 2\sin2\theta\,\mathrm{L}\,\mathrm{tang}\frac{\theta}{2} + 4\sin\theta\right);$$

or, en posant OA $= a$, OB $= b$, on a immédiatement

$$d = \frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right) = \frac{b\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right),$$

d'où

$$\mathrm{tang}\frac{\theta}{2} = \frac{a-b}{a+b}, \qquad d^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2},$$

ce qui donne pour l'aire de la boucle

$$\frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)^3}\left[4(a^4-b^4) + 8ab(a^2-b^2)\log\frac{a-b}{a+b} - (a^4 - 8a^2b^2 + b^4)\pi\right].$$

5° Si OA = OB, l'hyperbole équilatère (H) se réduit à ses asymptotes et le lieu de P se décompose en la bissectrice intérieure de l'angle OAB et en le cercle OAB.

2240.

(1915, p. 56.)

Des pieds des bissectrices intérieures, D, E, F, *d'un triangle* ABC, *on mène les parallèles aux côtés du triangle; elles coupent* BC, CA, AB *respectivement en* E_2 *et* F_1, D_2 *et* E_1, D_1 *et* F_2. *Montrer que les droites* AF_1, BE_1 *et* CD_1, AE_2, BD_2 *et* CF_2 *concourent en deux points* J_1 *et* J_2 *tels que la droite* J_1J_2 *est perpendiculaire à la ligne des centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle* ABC.

V. Thébault.

Solution
Par M. T. Ono.

D'après le théorème de Céva on obtient immédiatement les

deux points J_1 et J_2 dont les coordonnées trilinéaires sont en rapport :

(J_1) $\qquad b,\quad c,\quad a;$

(J_2) $\qquad c,\quad a,\quad b;$

ABC étant le triangle de référence.

L'équation de $J_1 J_2$ est

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \equiv (bc - a^2)\alpha + (ca - b^2)\beta + (ab - c^2)\gamma = 0;$$

l'équation de la ligne des centres O et I des cercles circonscrit et inscrit à ABC est

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \cos A & \cos B & \cos C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$\equiv (\cos B - \cos C)\alpha + (\cos C - \cos A)\beta + (\cos A - \cos B)\gamma = 0.$$

La condition de l'orthogonalité de ces deux droites est

$$\begin{aligned} D \equiv\ & \Sigma(bc - a^2)(\cos B - \cos C) \\ & - \Sigma[(ca - b^2)(\cos A - \cos B) \\ & \quad + (ab - C^2)(\cos C - \cos A)] \cos A = 0. \end{aligned}$$

On la vérifie comme il suit :

$$\begin{aligned} D &= (a + b + c)\Sigma(b - c)(\cos^2 A + \cos A + \cos B \cos C) \\ &= (a + b + c)\Sigma(b - c)(1 - \sin^2 A + \sin B \sin C) \\ &= (a + b + c)\Sigma(b - c) + \frac{a + b + c}{4R^2}\Sigma(b - c)(bc - a^2) \\ &= \frac{a + b + c}{4R^2}\begin{vmatrix} b - c & c - a & a - b \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Remarque. — Soient D′, E′, F′ les pieds des bissectrices extérieures du triangle ABC et I′, I″, I‴ les centres des cercles

exinscrits. En prenant les trois systèmes des points D, E′, F′; E, D′, F′; F, D′, E′, on obtient les points analogues J'_1, J'_2, J''_1, J''_2, ..., dont les rapports des coordonnées trilinéaires sont :

(J'_1)	b,	$-c$,	a,	(J'_2)	c,	a,	$-b$;
(J''_1)	b,	c,	$-a$,	(J''_2)	$-c$,	a,	b;
(J'''_1)	$-b$,	c,	a,	(J'''_2)	c,	$-a$,	b.

Et les droites J'_1, J'_2, J''_1, J''_2, J'''_1, J'''_2, sont perpendiculaires respectivement aux lignes des centres OI′, OI″, OI‴.

Autre solution, par M. R. Bouvaist.

2241.

(1915, p. 142.)

Démontrer les formules algébriques suivantes entre les distances respectives da, db, dc du point φ de Feuerbach d'un triangle ABC, *aux pieds* A′, B′, C′ *des hauteurs* AA′, BB′, CC′ :

1°

$$\frac{1}{da\,db} + \frac{1}{db\,dc} + \frac{1}{da\,dc} = \frac{1}{r}\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{r}\right),$$

r et R *désignant les rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle;*

2°

$$\frac{da}{\sin B \sin C (\cos B - \cos C)} = \frac{de}{\sin A \sin C (\cos C - \cos A)} = \frac{dc}{\sin A \sin B (\cos A - \cos B)}.$$

V. Thébault.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

1° Soient O le centre du cercle circonscrit, I le centre du cercle inscrit; M. Thébault a démontré que les distances φA′, φB′, φC′ sont respectivement égales aux distances Aα, Bβ, Cγ des sommets A, B, C à la droite OI (*Nouvelles Annales*,

1910, p. 275); or

$$da = A\alpha = R\,\frac{AI}{OI}\sin\frac{C-B}{2}, \qquad AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}},$$

d'où

$$\frac{1}{da} = \frac{OI}{Rr}\,\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{C-B}{2}} = \frac{OI}{Rr}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\,\frac{a}{c-b},$$

$$\frac{1}{da\,db} = \frac{\overline{OI}^2}{R^2r^2}\,\frac{ab(p-c)}{p(c-b)(a-c)},$$

d'où

$$\sum\frac{1}{da\,db}$$

$$= \frac{\overline{OI}^2}{R^2r^2}\left[\frac{ab(p-c)(b-a)+bc(p-a)(c-b)+ac(p-b)(a-c)}{p(b-a)(c-b)(a-c)}\right]$$

$$= -\frac{\overline{OI}^2}{R^2r^2} = \frac{2Rr-R^2}{R^2r^2} = \frac{1}{r}\left(\frac{2}{R}-\frac{1}{r}\right);$$

2°

$$da = \frac{Rr}{OI}\,\frac{c-b}{a}\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} = \frac{R}{OI}\,\frac{(p-a)(c-b)}{a};$$

or

$$\cos B - \cos C = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{2(c-b)(p-a)p}{abc};$$

d'où

$$da = \frac{R}{OI}\,\frac{(\cos B-\cos C)\,bc}{2p},$$

d'où

$$\frac{da}{bc(\cos B-\cos C)} = \frac{db}{ac(\cos C-\cos A)}$$

$$= \frac{dc}{ab(\cos A-\cos B)} = \frac{R}{2p.OI}.$$

Autres solutions, par M. T. Ono.

2242.

(1915, p. 143.)

On donne un tétraèdre ABCD *et un point* M. *La parallèle menée par* M *à une arête rencontre les faces qui ne contiennent pas cette arête aux points* P *et* Q. *Démontrer que la somme des produits* MP.MQ *pour les six arêtes égale la puissance de* M *par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre* AB.CD.

Généralisation d'une propriété connue relative au triangle.
V. Thébault.

Solution
Par M. R. Bouvaist.

Prenons le point M comme origine d'un système d'axes rectangulaires; si nous désignons par h_A, h_B, h_C, h_D les hauteurs du tétraèdre, l'équation de la sphère circonscrite peut se mettre sous la forme

$$\frac{\overline{BC}^2}{h_B h_C} yz + \frac{\overline{CA}^2}{h_C h_A} zx + \frac{\overline{AB}^2}{h_A h_B} xy + \frac{\overline{AD}^2}{h_A h_D} xt + \frac{\overline{BD}^2}{h_B h_D} yt + \frac{\overline{CD}^2}{h_C h_D} rt = 0,$$

x, y, z, t étant les équations canoniques des faces opposées aux sommets A, B, C, D; si δ_A, δ_B, δ_C, δ_D désignent les distances de l'origine aux faces, x, y, z, t, la puissance de ce point par rapport à la sphère a pour expression

$$(1) \quad \frac{\overline{BC}^2}{h_B h_C} \delta_B \delta_C + \frac{\overline{CA}^2}{h_C h_A} \delta_C \delta_A + \frac{\overline{AB}^2}{h_A h_B} \delta_A \delta_B + \frac{\overline{AD}^2}{h_A h_D} \delta_A \delta_D + \frac{\overline{BD}^2}{h_B h_D} \delta_B \delta_D + \frac{\overline{CD}^2}{h_C h_D} \delta_C \delta_D.$$

Supposons maintenant la droite MPQ parallèle à AD, nous aurons

$$MP = \frac{\delta_D}{\cos ADH_D} = \frac{AD}{h_D} \delta_D,$$

de même

$$MQ = \frac{AD}{h_A} \delta_A;$$

d'où

$$\mathrm{MP}.\mathrm{MQ} = \frac{\overline{\mathrm{AD}}^2}{h_{\mathrm{A}} h_{\mathrm{D}}} \delta_{\mathrm{A}} \delta_{\mathrm{D}};$$

on en conclut immédiatement que la somme des produits MP.MQ relatifs aux six arêtes est égale à l'expression (1).

Autres solutions, par M. R. Goormaghtigh et par *un Abonné*.

2247.

(1915, p. 144.)

On donne un cercle de centre O *et de rayon* a, *et la cardioïde, conchoïde de ce cercle, par rapport à un point de sa circonférence. On demande l'enveloppe d'un segment de longueur constante, égale à* a, *dont les extrémités décrivent respectivement la cardioïde précédente, et un cercle concentrique au cercle donné et de rayon double.*

F. Balitrand.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

Soient R le point de rebroussement de la cardioïde, P un point du cercle de centre O et de rayon a, M un point de la cardioïde situé sur RP, μ un point du cercle de centre O et de rayon $2a$, tel que $\mathrm{M}\mu = a$, ou $\mathrm{OP} = \mathrm{M}\mu$, $\mathrm{PM} = \mathrm{O}\mu$; RO et $\mathrm{M}\mu$ sont donc également inclinées sur $\mathrm{O}\mu$; l'enveloppe de $\mathrm{M}\mu$ est par suite une caustique par réflexion du cercle de centre O et de rayon $2a$, les rayons incidents étant parallèles à RO, c'est-à-dire une néphroïde de Proctor (*Nouvelles Annales*, 1915, p. 101).

Autres solutions, par M. J. Lemaire.

2248.

(1915, p. 144.)

On donne la chaînette qui a pour équation

$$\mathrm{Y} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\mathrm{X}}{a}} + e^{\frac{\mathrm{X}}{a}}\right)$$

et l'on demande le lieu des foyers des paraboles tangentes

à la chaînette et admettant comme directrice commune l'axe des X. F. BALITRAND.

SOLUTION
Par M. H. BROCARD.

TAT′ étant la tangente en A à la chaînette de sommet S, d'axe OS et de directrice Ox; soient δ l'angle ATx, OB l'abscisse du point A, et C la projection de B sur TAT′.

Le lieu des points C est la tractrice, ou courbe aux tangentes égales, développante de la chaînette. Ainsi,

$$BC = OS = \text{const.} = a.$$

Par définition, et en vertu de propriétés connues, la parabole de directrice OBx et tangente en A à la chaînette ou à la droite TAT′ aura son foyer F :

1° Sur la droite AF symétrique de AB par rapport à la tangente ACT;

2° Sur la droite BC perpendiculaire à la tangente en A.

Le point F(x, y) correspondant au point A(X, Y) rapporté aux axes OBx, OSy, sera donc déterminé par les conditions

$$x = X - 2a\sin\delta,$$
$$y = 2a\cos\delta,$$

avec

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{dY}{dX} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{X}{a}} - e^{-\frac{X}{a}}\right).$$

Mais

$$(X - x)^2 + y^2 = 4a^2$$

et

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{X - x}{y}.$$

On a donc

$$X - x = \sqrt{4a^2 - y^2}$$

et

$$\frac{\sqrt{4a^2 - y^2}}{y} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x + \sqrt{4a^2 - y^2}}{a}} - e^{-\frac{x + \sqrt{4a^2 - y^2}}{a}}\right).$$

C'est l'équation du lieu (F), mais la description géométrique de cette courbe se simplifie si l'on observe qu'elle est le lieu des extrémités des tangentes CB à la tractrice prolongées de la même longueur CF de l'autre côté du point de contact C.

Le lieu (F) est donc la syntractrice asymptote à Ox et ayant un tracé rappelant celui de la trisectrice de Mac Laurin.

La syntractrice a été étudiée en tous détails, et M. d'Ocagne, dans le présent Journal, en a exposé de nombreuses propriétés géométriques (tangente, normale, courbure, rectification, quadrature, etc.; 1891, p. 82-90 : *Sur une courbe définie par la loi de rectifiction*).

Le lecteur voudra bien s'y référer.

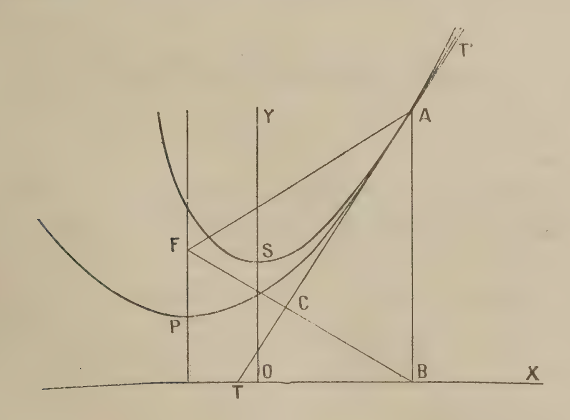
La question **2248** ajoute à la géométrie de la chaînette une nouvelle relation entre cette courbe et la parabole.

On sait, en effet, que la chaînette est la roulette du foyer d'une parabole donnée roulant sur l'axe des x; et que, si une chaînette roule sur une droite, une droite quelconque de son plan enveloppe une développante de parabole (A. Ribaucour, question **862**, 1868, p. 191, résolue 1871, p. 327).

Si une parabole roule sur une droite, l'enveloppe de sa directrice est une chaînette (W.-H. Besant, *Ibid.*, 1871, p. 475).

Enfin, la syntractrice est le lieu des foyers des paraboles tangentes à la chaînette et admettant la base de celle-ci pour directrice (question **2248**).

On pourra aussi obtenir l'équation du lieu (F) en défi-



nissant simplement comme syntractrice lieu du point divisant AC, dans un rapport donné, autrement dit, en partant de

l'équation de la tractice

$$X + \sqrt{a^2 - Y^2} = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - Y^2}}{y},$$

et l'on aura les relations

$$\frac{Y}{y} = \frac{a}{b},$$

$$x - X = \sqrt{a^2 - Y^2} - \sqrt{b^2 - y^2}$$

et pour le point F, il faudra prendre $b - 2a$.

Par conséquent, l'équation de (F) sera

$$x + \sqrt{4a^2 - y^2} = a \log \frac{2a + \sqrt{4a^2 - y^2}}{y}.$$

On vérifiera aisément l'identité des résultats ci-dessus.

Note. — Le sommet P de la parabole étant au milieu de l'ordonnée du foyer F, la courbe (P) sera une courbe affine de la syntractrice (F).

Autres solutions, par MM. R. Bouvaist, J. Lemaire, *l'Auteur* et *un Abonné*.

ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES.

730 (**1865**, 142). — Supposons que s_0, s_1, ... représentent les sommes des puissances zéro, première, etc., des racines de l'équation

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 n^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a_3 x^{n-3} + \ldots = 0.$$

Si

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix} < 0, \qquad \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix} > 0,$$

alors

$$(n-3)a_0^2(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2)-6(n-2)(a_1^2-a_0a_3)^2>0,$$

et toutes les racines de la dérivée de l'ordre $n-4$ de cette équation sont imaginaires. MICHAEL ROBERTS.

731 (**1865**, 143). — Démontrer qu'en éliminant f entre les équations

$$4(ac-4bd+3c^2)(bf-4ce+3d^2) - (af-3be+2cd)^2=0,$$

$$3[a^2(e^2-df)+3ab(cf-de)+4ac(d^2-ce) + 2b^2(d^2-bf)+5b^2ce+3c^4-8bc^2d] - (ae-4bd+3c^2)^2=0,$$

on est conduit à l'un ou l'autre des résultats

$$(ae-4bd+3c^2)^3-27(ace+2bcd-ad^2-eb^2-c^3)^2=0,$$
$$a^2(ae-4bd+3c^2)-3(b^2-ac)^2=0.$$

MICHAEL ROBERTS.

732 (**1865**, 143). — En posant

$$H=a_1^2-a_0a_2,$$
$$I=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2,$$
$$J=a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4-a_2^3,$$
$$K=4(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2)(a_1a_5-4a_2a_4+3a_3^2) - (a_0a_5-3a_1a_4+2a_2a_3)^2,$$
$$L=a_0^3(a_4^2-a_3a_5)+3a_0a_1(a_2a_5-a_3a_4) + 4a_0a_2(a_3^2-a_2a_4)+2a_1^2(a_3^2-a_1a_5) + 5a_1^2a_2a_4+3a_2^4-8a_1a_2^2a_3,$$

démontrer la relation suivante :

$$a_0^2L^2=4H[H(I^3-9J^2-2IL-HK)+a_0J(3L-I^2)] + a_0^2K(HI+a_0J)+a_0^2I(12J^2+2IL-I^3).$$

MICHAEL ROBERTS.

774 (**1866**, 384). — Démontrer que si X_n^m désigne le nombre

de manières de décomposer un polygone convexe de m côtés en n parties, au moyen de $n-1$ diagonales qui ne se coupent pas dans l'intérieur du polygone, on a

$$X_n^m = \frac{1}{n} \times \frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1)} \times \frac{(m-3)(m-4)\ldots(m-n-1)}{1,\ 2,\ \ldots,\ n-1}.$$

PROUHET.

791 (**1867**, 48). — Si $E(q)$ désigne la partie entière du nombre q; $p_1, p_2, p_3, \ldots$ la suite des nombres premiers 2, 3, 5, 7, ...; $S_{j,n}$ la somme des produits j à j des n nombres 1, 2, 3, ..., n; $F_\omega(x)$ un polynome de degré ω et à coefficients entiers, on aura

$$S_{j,n} = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-j+1)}{p_1^{\varphi_1} p_2^{\varphi_2} p_3^{\varphi_3}\ldots} F_{j-1}(n),$$

l'exposant φ d'un nombre quelconque p étant donné par la formule

$$\varphi = \sum_{\mu=\infty}^{\mu=0} E \frac{j}{(p-1)p^\mu}.$$

SYLVESTER.

805 (**1867**, 188). — On donne deux surfaces (S), (S'), la première fixe, l'autre se rapprochant indéfiniment de celle-ci. D'un point A de (S) et dans le plan tangent à cette surface on mène des tangentes à (S'). Quelle est la limite des positions de ces tangentes lorsque (S') tend vers (S), de façon que le point où (S') est touchée à chaque instant par un plan parallèle au plan tangent mené par le point A à (S) décrive une ligne qui coupe cette surface sous un angle fini?

O. BONNET.

812 (**1867**, 288). — Si par $3n-1$ points *consécutifs* sur une courbe du troisième degré on fait passer une courbe quelconque du $n^{\text{ième}}$ degré, les coordonnées de l'intersection des deux courbes seront des fonctions du degré $(3n-1)^2$ des coordonnées du point de contact.

SYLVESTER.

815 (**1867**, 288). — Pour qu'une surface du second ordre soit transformée homologiquement en une sphère, il faut et il suffit : 1° que le plan d'homologie soit parallèle à l'un des plans cycliques de la surface (Poncelet, *Propriétés projectives*); 2° que le centre d'homologie soit un quelconque des points de la *conique focale* située dans le plan principal auquel le plan d'homologie est perpendiculaire.

L. Painvin.

852 (**1868**, 138). — Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les quatre racines d'une équation du quatrième degré forment un quadrilatère inscriptible. Trouver la surface et le rayon de ce quadrilatère. Darboux.

858 (**1868**, 190) [1]. — D'un point M dans le plan d'une conique, on mène à celle-ci les deux tangentes MA et MB, puis par M on mène une droite MC.

Aux points A et B on construit les coniques ayant quatre points confondus avec la proposée et tangentes à MC.

Démontrer que : 1° ces coniques touchent MC au même point C; 2° que si l'on faisait tourner l'une d'elles de manière à la rabattre autour de MC du côté de la première, les coniques ainsi obtenues auraient en ce point un contact du troisième ordre, c'est-à-dire qu'elles auraient en C quatre points communs confondus.

859 (**1868**, 190). — Démontrer la même proposition pour les courbes du troisième degré, lorsque M est sur la polaire d'un point d'inflexion. A. Ribaucour.

861 (**1868**, 190). — Soient (C) un cercle de centre O; OX un diamètre quelconque. On prend sur OX une longueur OM sur laquelle, comme diamètre, on décrit un autre cercle (D). D'un point quelconque A de (C) on mène la droite AO qui rencontre le cercle (D) en un point B. Avec AB comme rayon on

---

[1] La question 858 a été résolu (**1869**, 460).
On n'en reproduit l'énoncé que pour rendre compréhensible celui de la question 859, restée sans solutions jusqu'à présent.

décrit un cercle, dont le centre est en A; on effectue la même construction en chacun des points de (C).

Les cercles ainsi obtenus ont une enveloppe. Déterminer les sommets de cette courbe.

Trouver la nature du lieu de ces sommets, lorsque M se déplace sur le diamètre OX. A. RIBAUCOUR.

880 (**1868**, 239). — P étant le produit des entiers inférieurs et premiers à un nombre N, la différence P — 1 est divisible par N lorsque N n'est ni premier, ni le double d'un nombre premier, ni une puissance d'un nombre premier impair, ni le double d'une telle puissance. LIONNET.

888 (**1868**, 335). — Démontrer, sans admettre aucun *postulatum*, que l'angle du quadrilatère ayant pour sommets les milieux des distances du centre d'un quadrilatère régulier à ses quatre côtés excède les $\frac{9}{10}$ d'un angle droit.

LIONNET.

895 *bis* (**1868**, 557). — Si deux triangles sont homologiques, montrer qu'on peut faire passer par leurs six sommets une cubique telle que les tangentes aux trois sommets de chacun des triangles aillent concourir respectivement en un point situé sur la courbe. SYLVESTER.

947 (**1869**, 277). — Étant donnée la série

$$C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots,$$

convergente pour une valeur finie quelconque réelle ou imaginaire de z, on pose l'équation

$$C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots = A,$$

A étant un nombre donné. Démontrer que la différence entre deux racines quelconques z_1 et z_2 de cette équation est supérieure à une quantité fixe qui dépend de A et des coefficients C_0, C_1, C_2, ... F. PICCIOLI.

967 (**1869**, 561). — THÉORÈME. — *a étant un nombre en-*

tier positif quelconque, si l'on désigne par S_n *la somme des résultats que fournit l'expression*

$$[t_1(a-1)][t_2(a-1)-1][t_3(a-1)-2]\ldots[t_n(a-1)-(n-1)],$$

lorsqu'on y remplace $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ *par tous les nombres entiers depuis* 1 *jusqu'à* p, *avec cette restriction qu'on ait toujours*

$$t_{k+1} \geqq t_k \quad \text{et} \quad t_k(a-1) > k-1,$$

alors on a l'identité suivante

$$\begin{aligned}\frac{S_1}{p+1} &+ \frac{S_2}{(p+1)(p+2)} \\ &+ \frac{S_3}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \ldots \\ &\quad + \frac{S(a-1)p}{(p+1)(p+2)\ldots(ap)} = \left(\frac{2^a-1}{a}\right)^p - 1.\end{aligned}$$

DÉSIRÉ ANDRÉ.

999 (**1870**, 430). — S_m désignant la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation

$$A_1x^n + A_2x^{n-1} + \ldots + A_m x^{n-m+1} + \ldots + A_n x + A_{n+1} = 0,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$A_m = \frac{a^m - b^m}{a-b},$$

on a, depuis $m=1$ jusqu'à $m=n$ inclusivement,

$$S_m = a^m + b^m.$$

On déduit de là que, a et b étant réels, l'équation considérée ne peut avoir deux racines réelles. S. REALIS.

1000 (**1870**, 430). — S_m désignant la somme des puissances semblables des racines de l'équation

$$\begin{aligned}x^n + ax^{n-1} &+ \frac{a(a+1)}{2}x^{n-3} \\ &+ \frac{a(a+1)(a+2)}{2.3}x^{n-3} + \ldots \\ &+ \frac{a(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+n-1)}{2.3.4\ldots n} = 0,\end{aligned}$$

on a

$$S_n = S_{n-1} = S_{n-2} = \ldots = S_2 = S_1 = -a,$$

$$S_{n+1} = \frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{2.3.4\ldots n} - a.$$

On déduit de là que, a étant positif, l'équation considérée ne peut avoir deux racines réelles, ce qui s'accorde avec l'énoncé de la question 776 (**1866**, 432).

Note. — Pour l'équation

$$x^n + \frac{x^{n-1}}{1} + \ldots + \frac{x^{n-p}}{p!} + \ldots + \frac{x}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} = 0,$$

on a évidemment

$$S_1 = S_2 = \ldots = S_n = 0,$$

et l'on reconnaît de même que l'équation ne peut avoir deux racines réelles, ce qui s'accorde avec la question 775 (**1866**, 432).

S. Realis.

1007 (**1870**, 479). — Par chaque point d'une surface du second degré on peut faire passer deux cônes de révolution circonscrits à la surface. Ces cônes se coupent suivant deux coniques dont les tangentes au point considéré de la surface sont aussi tangentes aux sections circulaires de la surface qui passent par ce point. Les lignes de courbure qui passent par le même point sont les bissectrices des angles formés par les deux tangentes. Émile Weyr.

1008 (**1870**, 480). — Tout cube parfait différent de zéro, augmenté de 1, 2 ou 8 unités d'un ordre quelconque, n'est pas un cube parfait. Moret-Blanc.

1015 (**1871**, 96). — Construire une surface gauche ayant pour ligne de structure une courbe donnée, et pour cône directeur un cône de révolution, également donné.

Démontrer que si l'ouverture du cône varie, le paramètre de distribution de chaque génératrice reste constant et égal à ce qu'il est lorsque le cône directeur se réduit à un plan.

G. Fouret.

[B12b, d]

SUR LA QUANTITÉ (DA)(BC) + (DB)(CA) + (DC)(AB) ENVISAGÉE DANS L'ESPACE ;

PAR M. G. FONTENÉ.

Je reviens aujourd'hui sur un sujet dont je me suis déjà occupé dans ce Journal. Mon intention est surtout de signaler ce qu'il y aurait à faire pour obtenir directement la propriété rappelée au n° 4 : *on pourrait trouver là l'origine d'un nouveau calcul vectoriel.* Je donne ici, faute de mieux, une démonstration par l'inversion qui a du moins le mérite d'être simple.

I.

1. La notation (AB) désigne un vecteur, de sorte que l'on a

$$(AB) = (OB) - (OA).$$

De quelque façon que l'on définisse le produit (AB)(CD), *si la multiplication est distributive*, la quantité

$$(DA)(BC) + (DB)(CA) + (DC)(AB),$$

dans laquelle les quatre points jouent le même rôle, a pour expression, quand on prend D comme origine,

$$-[(DB)(DC) - (DC)(DB)] - \ldots - \ldots.$$

Si la multiplication est, en outre, commutative,

on aura l'identité

$$(1)\qquad (DA)(BC)+(DB)(CA)+(DC)(AB)=0.$$

2. Pour des points en ligne droite, il suffit de mesurer (AB) par une quantité algébrique $\overline{AB}$; on a l'identité d'Euler. Pour un quadrangle plan, ou quatre points dans l'espace, on peut considérer *le produit scalaire* (¹)

$$(AB)(CD)=AB.CD\cos\widehat{AB,\ CD};$$

la multiplication étant alors distributive et commutative, on obtient l'identité connue

$$(2)\qquad \Sigma\, DA.BC\cos\widehat{DA,\ BC}=0;$$

si deux des cosinus sont nuls, le troisième est nul. Cette identité peut d'ailleurs se déduire de la formule connue

$$(\overline{DB}^2+\overline{CA}^2)-(\overline{DC}^2+\overline{AB}^2)=-2DA.BC\cos\widehat{DA,\ BC}.$$

3. Pour quatre points dans un plan, on peut encore mesurer (AB) par une quantité imaginaire $\overline{AB}$. Soient α, β, γ, α', β', γ' les arguments des *directions* BC, CA, AB, DA, DB, DC; on a, par exemple,

$$\overline{BC}=BC(\cos\alpha+i\sin\alpha),$$

et l'identité fondamentale donne

$$DA.BC[\cos(\alpha+\alpha')+i\sin(\alpha+\alpha')]+\ldots+\ldots=0.$$

(¹) On donne souvent à ce produit le nom de *produit géométrique;* c'est un tort, et cette expression pourrait tout au plus être employée pour désigner le produit que nous appellerons par la suite *produit vectoriel.*

Les produits DA.BC, DB.CA, DC.AB mesurent donc les côtés d'un triangle LMN, les directions MN, NL, LM ayant pour arguments

$$\alpha+\alpha', \qquad \beta+\beta', \qquad \gamma+\gamma'.$$

L'angle des directions NL, LM (angle extérieur du triangle) a pour valeur, à $4n^d$ près,

$$(\gamma'-\beta')+(\gamma-\beta) \quad \text{ou} \quad (\gamma-\beta')+(\gamma'-\beta),$$

c'est-à-dire

$$\widehat{DB, DC}+\widehat{CA, AB} \quad \text{ou} \quad \widehat{DB, AB}+\widehat{CA, DC};$$

en ajoutant 2^d, on a donc pour l'angle intérieur du triangle, à $4n^d$ près,

$$\widehat{LM, LN}=\widehat{DB, DC}+\widehat{AC, AB}=\widehat{BD, BA}+\widehat{CA, CD},$$

et la structure de ces deux sommes est facile à saisir : la première est construite avec D et A combinés avec B et C ou C et B, la seconde est construite avec B et C combinés avec D et A ou A et D. On a ainsi un théorème auquel on doit attacher le nom de Bellavitis, encore que l'illustre auteur n'ait explicité l'énoncé que dans des cas particuliers :

Dans un quadrangle plan ABCD, *les produits*

$$(3) \qquad l=DA.BC, \qquad m=DB.CA, \qquad n=DC.AB$$

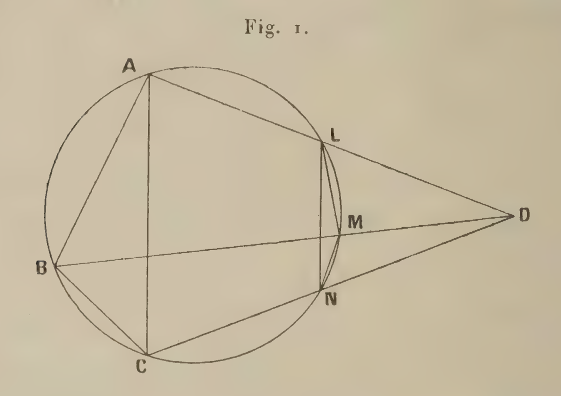
sont proportionnels aux côtés d'un triangle LMN *dont les angles ont pour valeurs, à des multiples près de quatre angles droits,*

$$(4)\quad \begin{cases} \widehat{LM, LN}=\widehat{DB, DC}+\widehat{AC, AB}=\widehat{BD, BA}+\widehat{CA, CD}, \\ \widehat{MN, ML}=\widehat{DC, DA}+\widehat{BA, BC}=\widehat{CD, CB}+\widehat{AB, AD}, \\ \widehat{NL, NM}=\widehat{DA, DB}+\widehat{CB, CA}=\widehat{AD, AC}+\widehat{BC, BD}. \end{cases}$$

Si le quadrangle est inscriptible, on a le théorème de Ptolémée.

Le théorème de Bellavitis s'obtient facilement pour un quadrangle plan ABCD en faisant une inversion de pôle D; si L, M, N (*fig.* 1) sont les inverses des

Fig. 1.



points A, B, C, on a en effet, la puissance d'inversion étant k^2,

$$MN = k^2 \frac{BC}{DB.DC} = \frac{k^2}{DA.DB.DC} \times DA.BC, \ldots,$$

et, pour les angles, les formules ci-dessus. Avec la figure donnée ici, on écrira de préférence

$$\widehat{LN, LM} = \widehat{AB, AC} - \widehat{DB, DC},$$

$$\widehat{ML, MN} = \widehat{BC, BA} - \widehat{DC, DA},$$

$$\widehat{NM, NL} = \widehat{CA, CB} - \widehat{DA, DB},$$

l'angle $\widehat{DC, DA}$ étant seul négatif.

4. J'ai donné dans les *Nouvelles Annales* (1899, p. 407 et suiv.), l'analogue du théorème de Bellavitis dans le cas du tétraèdre.

L'angle résultant de deux angles (a, b) et (c, d) est l'angle (e, f) obtenu en amenant ces angles, par glissement dans leurs plans respectifs, le premier dans la position (e, ω), le second dans la position (ω, f), ω étant l'intersection des deux plans prise dans un sens arbitraire si l'on a égard seulement à la grandeur de l'angle (e, f), et non à la direction de son plan comme dans la théorie des vecteurs. Les plans des deux angles étant orientés, si ω est l'angle de ces deux plans, on a

$$\cos(e, f) = \cos(a, b)\cos(c, d) - \sin(a, b)\sin(c, d)\cos\omega;$$

si ω est l'angle des demi-plans (ω, e) et (ω, f), l'un des angles (a, b) et (c, d) est négatif. Nous écrirons

$$(e, f) = [(a, b) + (c, d)].$$

On a alors ce théorème :

Dans un tétraèdre ABCD, *les produits*

$$(5) \qquad l = \text{DA.BC}, \qquad m = \text{DB.CA}, \qquad n = \text{DC.AB}$$

sont proportionnels aux côtés d'un triangle LMN *dont les angles ont pour valeurs, à des multiples près de quatre angles droits :*

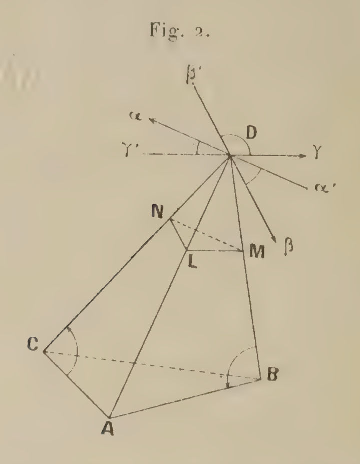
$$(6) \quad \begin{cases} \text{L} = [(\text{DB}, \text{DC}) + (\text{AC}, \text{AB})] = [(\text{BD}, \text{BA}) + (\text{CA}, \text{CD})], \\ \text{M} = [(\text{DC}, \text{DA}) + (\text{BA}, \text{BC})] = [(\text{CD}, \text{CB}) + (\text{AB}, \text{AD})], \\ \text{N} = [(\text{DA}, \text{DB}) + (\text{CB}, \text{CA})] = [(\text{AD}, \text{AC}) + (\text{BC}, \text{BD})]. \end{cases}$$

Si l'on pouvait définir le produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace de façon que la multiplication fût distributive et commutative, c'est probablement ce théorème que l'on obtiendrait comme conséquence de l'identité

$$(\text{DA})(\text{BC}) + (\text{DB})(\text{CA}) + (\text{DC})(\text{AB}) = 0.$$

5. Une inversion de pôle D permet de démontrer le théorème en question. Si une sphère passant en A, B, C coupe en L, M, N (*fig.* 2) les arêtes DA, DB,

Fig. 2.



DC du tétraèdre, comme les produits DA.BC, ... sont proportionnels aux côtés du triangle LMN, il faut montrer que l'angle L, par exemple, est égal à l'angle résultant dont on a écrit ci-dessus la définition. On peut, pour cet objet, faire passer la sphère par le point D, et l'angle L sera remplacé par l'angle des tangentes menées en D aux deux cercles DAB, DAC, ces tangentes étant menées à partir de D du même côté de l'arête DA que les triangles DAB, DAC : l'angle $(D\gamma, D\beta')$ de ces tangentes doit être égal à l'angle résultant.

Considérons la figure 2, dans laquelle les droites $\alpha'\alpha$, $\beta'\beta$, $\gamma'\gamma$ sont les traces, sur le plan tangent en D à la sphère ABCD, des plans des faces du trièdre D. Soient les angles résultants

$$[(DB, DC) + (AC, AB)], \quad [(BD, BA) + (CA, CD)],$$

dont on ne sait pas *a priori* s'ils sont égaux. Pour

construire le second de ces angles résultants, l'intersection des deux plans DAB et DAC étant DA, on peut déplacer le point B sur l'arc de cercle ABD jusqu'à l'amener en D, déplacer le point C sur l'arc de cercle ACD jusqu'à l'amener aussi en D : l'angle (BD, BA) devient l'angle ($D\gamma'$, DA), l'angle (CA, CD) devient l'angle (DA, $D\beta$), et l'angle résultant est ainsi l'angle ($D\gamma'$, $D\beta$), que l'on peut remplacer par l'angle opposé ($D\gamma$, $D\beta'$). C'est le fait que l'on voulait établir, du moins en prenant l'angle résultant sous la seconde forme. Les trois angles résultants qui figurent dans l'énoncé du théorème sont égaux aux angles

$$(D\gamma,\ D\beta'),\quad (D\alpha,\ D\gamma'),\quad (D\beta,\ D\alpha')$$

situés dans le plan tangent en D à la sphère ABCD.

On a considéré seulement le second des deux angles résultants écrits ci-dessus, et on l'a construit au point D, ce qui a donné l'angle des tangentes $D\gamma$ et $D\beta'$; on aurait pu le construire en A et il est clair que l'angle ainsi obtenu eût été égal à l'angle en D. Si l'on avait considéré le premier angle résultant, on l'aurait construit en B ou en C. Que cet angle résultant soit égal à l'autre, c'est ce qui résulte du fait que le théorème dont il s'agit peut se démontrer par une inversion de pôle B aussi bien que par une inversion de pôle D. Au surplus, la démonstration directe est facile. Si l'on envisage les quatre cercles DAB, DAC et BCD, BCA, une inversion de pôle D substitue à ces quatre cercles les droites LM, LN, et la droite MN avec le cercle LMN : l'angle des tangentes en A aux cercles DAB, DAC se transforme en l'angle égal (LM, LN); l'angle des tangentes en B aux cercles BCD, BCA, telles qu'on doit les mener, se transforme en l'angle que fait le prolongement de la droite NM avec la tangente en M au

cercle LMN prise en avant de MN ; or, ce dernier angle, ou mieux son opposé, est égal à l'angle (LM, LN). Voici une vérification : lorsque, laissant fixes l'arête DA et les deux plans DAB, DAC, on amène B et C en D pour montrer que le second angle résultant est égal à l'angle des tangentes en D aux deux cercles DAB et DAC, le premier angle résultant se réduit également à l'angle de ces tangentes, puisque, en même temps que les directions DB et DC deviennent $D\gamma$ et $D\beta'$, l'angle (AC, AB) devient nul.

II.

6. On doit appeler *produit vectoriel* de deux vecteurs (AB) et (CD) un vecteur OH dont la longueur est mesurée par le même nombre que le produit

$$AB.CD \sin \widehat{AB, CD},$$

et dont la direction est orthogonale aux deux vecteurs donnés ; si, par un point quelconque O, on mène les vecteurs OB' et OD' équipollents aux vecteurs AB et CD, on peut dire encore que la longueur du vecteur-produit est mesurée par le même nombre que l'aire du triangle OB'D' ; quant au sens de ce vecteur-produit OH, il est tel que pour l'observateur OH le sens de circulation OB'D' soit un sens déterminé.

Observons que, si l'on projette les deux vecteurs AB et CD sur un plan parallèle à chacun d'eux, en A'B' et C'D', le produit

$$AB.CD \sin \widehat{AB, CD}$$

représente le double de l'aire du quadrilatère ACBD. Je rappelle que l'aire plane ABCDE...L, quelle que

soit la forme du contour ABCDE...L, est la somme des aires algébriques

$$\overline{OAB},\quad \overline{OBC},\quad \overline{OCD},\quad \ldots,\quad \overline{OLA},$$

le point O étant un point quelconque pris dans le plan de la figure (Voir *Géométrie dirigée*, librairie Nony, 1897.)

7. Avec le produit vectoriel, la multiplication est encore distributive; *elle n'est plus commutative*, le vecteur-produit changeant de sens quand on change l'ordre des deux facteurs. On a alors

$$ab - ba = 2\,ab,$$

et il arrive ceci :

1° *L'expression*

$$(DA)(BC) + (DB)(CA) + (DC)(AB)$$

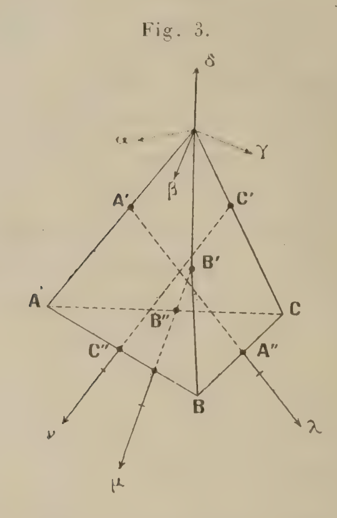
n'est pas nulle;

2° *Les quatre points* A, B, C, D *ne jouent pas le même rôle, et l'on aura à considérer quatre expressions de cette nature.*

8. Soit un tétraèdre ABCD. Le sens direct de rotation autour d'un axe étant *de gauche à droite*, nous supposons que le sens de circulation BCD est le sens *direct* pour un observateur qui a les pieds sur le plan BCD et la tête en A; le sens de circulation ACD (ordre alphabétique) est alors le sens *rétrograde* pour un observateur qui a les pieds sur le plan ACD et la tête en B; le sens de circulation ABD est *direct*..., le sens de circulation ABC est *rétrograde*.... Le nombre des points A, B, C, D étant pair, on aurait la même alternance de sens si l'on considérait, avec per-

mutation circulaire, BCD, CDA, DAB, ABC. On peut dire encore : le sens de circulation ABC étant rétro-

Fig. 3.



grade..., les sens de circulation DBC, DCA, DAB sont directs....

Nous aurons à considérer les expressions

(1) $(AB)(CD)+(AC)(DB)+(AD)(BC),$

(2) $-[(BA)(CD)+(BC)(DA)+(BD)(AC)],$

(3) $(CA)(BD)+(CB)(DA)+(CD)(AB),$

(4) $-[(DA)(BC)+(DB)(CA)+(DC)(AB)],$

relatives aux quatre sommets A, B, C, D. Nous poserons, en écrivant ici λ pour (λ),

$$\lambda = -(DA)(BC),$$
$$\mu = -(DB)(CA),$$
$$\nu = -(DC)(AB);$$

si $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ sont les perpendiculaires communes aux couples d'arêtes opposées du tétraèdre, les points A', B', C' étant sur les arêtes issues de D, les

vecteurs λ, μ, ν sont dirigés suivant ces droites, et orientés de A' vers A'', de B' vers B'', de C' vers C'', puisque le premier, par exemple, est le produit (AD) (BC); en désignant par V le volume du tétraèdre, les modules de ces vecteurs sont respectivement

$$\frac{6V}{A'A''}, \quad \frac{6V}{B'B''}, \quad \frac{6V}{C'C''}.$$

Les expressions (1), ..., (4) sont alors, en changeant l'ordre des termes,

$$(1) \qquad \lambda, \quad -\mu, \quad -\nu,$$

$$(2) \qquad -\lambda, \quad +\mu, \quad -\nu,$$

$$(3) \qquad -\lambda, \quad -\mu, \quad +\nu,$$

$$(4) \qquad \lambda, \quad +\mu, \quad +\nu;$$

sur les arêtes issues de A, par exemple, se trouvent les points A', B'', C'', et l'on considère dans l'expression (1) la somme de vecteurs orientés de A' vers A'', de B'' vers B', de C'' vers C', de même que, dans l'expression (4), on considère la somme de vecteurs orientés de A', B', C' vers A'', B'', C''.

9. Nous allons rattacher les vecteurs λ, μ, ν, liés aux trois couples d'arêtes opposées, à d'autres vecteurs α, β, γ, δ, liés aux quatre faces du tétraèdre. Nous désignerons par α un vecteur perpendiculaire au plan BCD, orienté comme l'indique la figure, c'est-à-dire vers la région où est A, et dont le module est le double de l'aire du triangle BCD; on aura de même les vecteurs β, γ, δ. Les modules de ces vecteurs sont respectivement

$$\frac{6V}{h_1}, \quad \frac{6V}{h_2}, \quad \dots.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}
\alpha &= (DBC) = (DB)(DC) = (BC)(BD) = (CD)(CB),\\
\beta &= (DCA) = (DC)(DA) = (CA)(CD) = (AD)(AC),\\
\gamma &= (DAB) = (DA)(DB) = (AB)(AD) = (BD)(BA),\\
-\delta &= (ABC) = (AB)(AC) = (BC)(BA) = (CA)(CD).
\end{aligned}$$

On a alors

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}
\lambda &= \beta + \gamma = -(\delta + \alpha),\\
\mu &= \gamma + \alpha = -(\delta + \beta),\\
\nu &= \alpha + \beta = -(\delta + \gamma),
\end{aligned}\right.$$

ce qui forme seulement quatre relations distinctes, dont l'une est la relation bien connue

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$$

En effet, si l'on prend D comme origine, on a

$$\begin{aligned}
-(DA)(BC) &= -(DA)[(DC) - (DB)]\\
&= (DC)(DA) + (DA)(DB);
\end{aligned}$$

en prenant B comme origine, on a de même

$$\begin{aligned}
-(DA)(BC) &= -[(BA) - (BD)](BC)\\
&= -[(BA)(BC) + (BC)(BD)].
\end{aligned}$$

Si l'on écrit

$$\begin{aligned}
(BC)(DA) &= (BD)(BA) + (CA)(CD),\\
(DA)(BC) &= (DB)(DC) + (AC)(AB),
\end{aligned}$$

le mécanisme de ces égalités apparaît nettement.

Des relations ci-dessus on déduit le système équivalent

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}
\lambda + \mu + \nu &= -2\delta,\\
\lambda - \mu - \nu &= -2\alpha,\\
-\lambda + \mu - \nu &= -2\beta,\\
-\lambda - \mu + \nu &= -2\gamma,
\end{aligned}\right.$$

ou

$$-[(DA)(BC)+(DB)(CA)+(DC)(AB)]=-2\delta,$$
$$(AB)(CD)+(AC)(DB)+(AD)(BC)=-2\alpha,$$
. . . .

Trois vecteurs λ, μ, ν, *dirigés suivant* A′A″, B′B″, C′C″, *orientés de* A′ *vers* A″, ..., *et ayant pour longueurs*

$$\frac{k^2}{A'A''}, \quad \frac{k^2}{B'B''}, \quad \frac{k^2}{C'C''},$$

ont pour somme le vecteur -2δ, *dirigé suivant la hauteur issue de* D, *orienté de* D *vers le plan* ABC, *et ayant pour longueur* $2\frac{k^2}{h_4}\cdot$ *Si l'on change le sens des deux derniers vecteurs, on a pour somme* -2α; *etc.*

10. On arrive directement à ce résultat en écrivant

$$\begin{aligned}-[DA)(BC)+\ldots+\ldots &= (DA)[(DB)-(DC)]+\ldots+\ldots\\ &= (DB)(DC)-(DC)(DB)+\ldots+\ldots\\ &= 2[(DB)(DC)+\ldots+\ldots],\end{aligned}$$

ou

$$\lambda+\mu+\nu=2(\alpha+\beta+\gamma).$$

Si l'on ne veut pas supposer connue la relation

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0,$$

qui est un cas particulier d'une relation générale relative à un polyèdre quelconque, on peut établir comme il suit l'égalité $\alpha+\beta+\gamma=-\delta$. L'expression

$$-[(DA)(BC)+\ldots+\ldots]$$

a une valeur indépendante de la position du point D, comme on le voit en évaluant les trois vecteurs (DA), (DB), (DC) par rapport à une origine quelconque D′;

il en est donc de même de l'expression

$$(DB)(DC) + \ldots + \ldots,$$

et l'on peut l'évaluer en remplaçant le point D par un point D' du plan ABC; on voit alors qu'elle a pour valeur $-\delta$.

J'ai proposé la démonstration de l'égalité

$$\lambda + \mu + \nu = -2\delta$$

dans les *Nouvelles Annales*, en 1898; la solution précédente a été donnée en 1900, page 379, en supposant connue la relation $\alpha + \beta + \gamma = -\delta$.

11. Les relations (5) peuvent être établies d'une manière qui en rend mieux compte que le procédé employé ci-dessus. Les vecteurs β, γ et λ sont tous trois perpendiculaires à l'arête DA; transportons les vecteurs β et γ en A', et soient β_1, γ_1 les deux vecteurs ainsi obtenus. Le vecteur β_1, perpendiculaire au plan DAC, et dont le module est égal au double de l'aire du triangle DAC, est la résultante de deux vecteurs rectangulaires, l'un dirigé suivant A'A'', l'autre perpendiculaire au plan DAA''; le vecteur γ_1 est de même la résultante de deux vecteurs, l'un dirigé suivant A'A'', l'autre perpendiculaire au plan DAA''. Les deux vecteurs perpendiculaires au plan DAA'' sont de sens contraires et ont des modules égaux : ces modules sont, en effet, les doubles des aires des deux triangles obtenus en projetant les triangles DAC et DAB sur le plan DAA'', et ces deux triangles, de base DA, ont même hauteur puisque la projection de l'arête BC sur le plan DAA'' est perpendiculaire à A'A'', donc parallèle à DA. Restent donc les composantes des deux vecteurs β_1, γ_1 suivant A'A''. Les modules de ces vecteurs

sont les doubles des aires des triangles obtenus en projetant les deux triangles DAB, DAC sur le plan mené par DA perpendiculairement à $A'A''$: la somme des aires des triangles ainsi obtenus, ou l'aire du quadrilatère DCAB, est précisément la moitié du module du vecteur λ. On a donc bien $\lambda = \beta + \gamma$.

III.

12. Dans la théorie des quaternions, l'élément fondamental est l'ensemble d'un nombre d et d'un vecteur; j'ai proposé (*Enseignement mathématique*) de donner à cet élément le nom de *scal-vecteur*.

Le produit de deux scal-vecteurs est un scal-vecteur. En particulier, *le produit de deux vecteurs est un scal-vecteur* dont la partie scalaire est le produit scalaire changé de signe, dont la partie vectorielle est le produit vectoriel; cela résulte de la formule

$$(a_i + b_j + c_k)(a'_i + b'_j + c'_k)$$
$$= -(aa' + bb' + cc') + (bc' - cb')i + \ldots + \ldots.$$

Quand on change l'ordre des facteurs, pour le produit de deux vecteurs, la partie scalaire ne change pas, la partie vectorielle change de signe. On a donc

$$(\mathrm{AB})(\mathrm{CD}) - (\mathrm{CD})(\mathrm{AB}) = 2 \times \text{partie vectorielle de } (\mathrm{AB})(\mathrm{CD}),$$

sans partie scalaire. Si l'on écrit alors

$$-[(\mathrm{DA})(\mathrm{BC}) + \ldots + \ldots] = (\mathrm{DB})(\mathrm{DC}) - (\mathrm{DC})(\mathrm{DB}) + \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots,$$

la partie scalaire est nulle; on réunit ainsi, *sans aucun avantage d'ailleurs*, la démonstration de la formule scalaire

$$\sum \mathrm{DA}.\mathrm{BC} \cos \widehat{\mathrm{DA}, \mathrm{BC}} = 0,$$

et la démonstration de la formule vectorielle

$$\lambda + \mu + \nu = -2\delta.$$

Il est procédé ainsi dans la solution citée à la fin du n° 10.

13. En géométrie plane, avec deux axes Ox, Oy tracés dans le plan, et un axe Oz perpendiculaire au plan, un vecteur a pour symbole $a_i + b_j$; on a alors, pour deux vecteurs AB et CD,

$$(a_i + b_j)(a'_i + b'_j) = -(aa' + bb') + (ab' - ba')k,$$

ou

$$(\mathrm{AB})(\mathrm{CD}) = -\mathrm{AB}.\mathrm{CD}\cos\widehat{\mathrm{AB}, \mathrm{CD}}$$
$$+ \mathrm{AB}.\mathrm{CD}\sin\widehat{\mathrm{AB}, \mathrm{CD}} \times k.$$

Ce produit complet, qui est un scal-vecteur, est fort différent du produit complexe

$$\mathrm{AB}(\cos\alpha + i\sin\alpha) \times \mathrm{CD}(\cos\beta + i\sin\beta)$$
$$= \mathrm{AB}.\mathrm{CD}[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)],$$

et c'est, je le répète, l'analogue de ce dernier produit qu'il faudrait définir pour déduire d'une identité de la forme

$$(\mathrm{DA})(\mathrm{BC}) + (\mathrm{DB})(\mathrm{CA}) + (\mathrm{DC})(\mathrm{AB}) = 0$$

le théorème du n° 4 qui est l'extension à l'espace du théorème de Bellavitis.

14. Je ferai, en terminant, la remarque suivante. Le quotient de deux scal-vecteurs est défini par la relation

$$\text{diviseur} \times \text{quotient} = \text{dividende}.$$

On peut représenter un scal-vecteur par le quotient

de deux vecteurs, et cette représentation donne une règle simple pour le produit de deux scal-vecteurs; on a, en effet,

$$\frac{(OC)}{(OA)} : \frac{(OB)}{(OA)} = \frac{(OC)}{(OB)} \quad \text{ou} \quad \frac{(OB)}{(OA)} \times \frac{(OC)}{(OB)} = \frac{(OC)}{(OA)}.$$

[K'1]

SECONDE NOTE SUR LE PROBLÈME DE PAPPUS GÉNÉRALISÉ;

PAR M. JOSEPH JOFFROY,
Professeur honoraire.

Pour l'intelligence des courtes observations qui suivent, il est nécessaire de se reporter à l'article publié par moi, en avril 1916 (p. 168-171), et à la figure qui l'accompagne.

En supposant droit l'angle $XOY = \omega$ et cherchant $OS = x$ qui déterminera la droite $SS_1 = l$ inscrite dans l'angle et passant par le point P de la bissectrice dont les coordonnées sont $OA = a$, $OB = a$, on obtient

$$(E_1) \quad x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - l^2)x^2 + 2al^2x - a^2l^2 = 0.$$

Dans les Traités d'Algèbre on déclare que l'équation (E_1) ne peut pas être résolue par des expressions calculables, et l'on cherche une inconnue autre que OS. Je vais prouver que, en résolvant (E_1) par la méthode générale connue, on obtient ses racines sous une forme permettant de les calculer et de les construire.

Pour résoudre

$$\text{(F)} \qquad X^4 + AX^2 + BX + C = 0,$$

on a (*voir* l'Algèbre de Briot)

$$X^2 + pX + q = 0, \qquad X^2 - pX + A + p^2 - q = 0,$$

$$q = \frac{p(A + p^2) - B}{2p}, \qquad p^2 = z,$$

$$z^3 + 2Az^2 + (A^2 - 4c)z - B^2 = 0.$$

D'abord je mets (E_1) sous la forme (F) en remplaçant x par $X + h = X + \frac{a}{2}$; elle devient

$$X^4 + \frac{a^2 - 2l^2}{2} X^2 + a(a^2 + l^2)X + \frac{5a^4 - 4a^2l^2}{16} = 0,$$

et l'équation en z devient

$$z^3 + (a^2 - 2l^2)z^2 + (l^4 - a^4)z - a^2(a^2 + l^2)^2 = 0.$$

Le produit de ses racines étant $a^2(a^2 + l^2)^2$, j'ai l'idée de mettre à la place de z le facteur $a^2 + l^2$, et je constate que l'équation est satisfaite. La somme des deux autres racines est

$$2l^2 - a^2 - (a^2 + l^2) = l^2 - 2a^2;$$

leur produit est

$$\frac{a^2(a^2 + l^2)^2}{a^2 + l^2} = a^2(a^2 + l^2);$$

elles valent donc

$$\frac{l^2 - 2a^2 \pm \sqrt{l^4 - 8a^2l^2}}{2}.$$

Pour $z = a^2 + l^2$, j'ai

$$p^2 = z, \qquad p = \pm\sqrt{a^2 + l^2}.$$

Je suppose $p = +\sqrt{a^2 + l^2}$; q est alors déterminé, et je résous les équations

$$x^2 + px + q = 0, \qquad x^2 - px + A + p^2 - q = 0$$

dont les racines X sont celles de (E_2).

Celles de E_1 sont donc

$$x = X + \frac{a}{2}.$$

Théorème relatif au problème tout à fait général. — Le point P quelconque dans l'angle $XOY = \omega$ a pour coordonnées $OA = a$, $OB = b$; $SS' = l$ est la droite qu'il faut inscrire.

Je cherche $AS = x$, $BS_1 = y$:

La figure donne

$$\frac{y + b}{b} = \frac{x + a}{x},$$

$$(y + b)^2 + (x + a)^2 - 2(x + a)(y + b)\cos\omega = l^2.$$

Éliminant y, j'obtiens

$$\text{(J)} \quad x^4 + 2(a - b\cos\omega)x^3 + (a^2 + b^2 - 4ab\cos\omega - l^2)x^2 + 2ab(b - a\cos\omega)x + a^2b^2 = 0.$$

Soient S, S', S'', S''' les points des quatre droites l (inscriptibles dans XOY) situées sur OX : les valeurs de x, racines de (J), sont celles de $+AS$, $+AS'$, $-AS''$, $-AS'''$: leur produit vaut a^2b^2, dernier terme de (J), il ne change donc pas quand l change, ni la somme des produits de trois de ces longueurs, laquelle vaut $-2ab(b - a\cos\omega)$, ni la somme de ces longueurs qui vaut $2(-a + b\cos\omega)$.

Soient S_1, S'_1, S''_1, S'''_1 les points des quatre droites l inscrites qui sont sur OY : leurs distances au point B de OY donnent lieu aux mêmes propriétés ci-dessus, Leur produit est le même quelle que soit la grandeur

de l; de plus, *il est égal au produit ci-dessus*, égal à $a^2 b^2$, ce qui est remarquable (on voit bien que l'équation en x devient l'équation donnant y si l'on change x en y, a en b et b en a).

CORRESPONDANCE.

M. **F. Balitrand**. — *A propos d'une question de Cinématique*. — La question de cinématique posée par M. Faucheux (*N. A.*, 1917, p. 60) renferme dans son énoncé une petite inexactitude due à une transposition des cas particuliers I et II. C'est ce qui nous a poussé, en même temps que l'intérêt propre du problème, à en donner la solution ci-dessous. Nous conservons les notations de M. Faucheux.

Soient de plus O un point de la trajectoire T et OP l'accélération en ce point. Les composantes de OP suivant la tangente et la normale en O à T sont

$$OA = v\frac{dv}{ds}, \qquad OB = \frac{v^2}{\rho}.$$

Les triangles semblables OCM, OBP donnent

$$\frac{CM}{BP} = \frac{OC}{OB};$$

et puisque, par hypothèse,

$$CM = n\,CC_1 = n\rho_1 = n\rho\frac{d\rho}{ds} \qquad (n = \text{const.}),$$

on a

$$n\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dv}{v};$$

d'où

$$v = C\rho^n.$$

La réciproque se démontrerait en reprenant les calculs précédents en sens inverse.

Cas particuliers. — $n = 1$:

$$v = \frac{ds}{dt} = c\rho = c\frac{ds}{\varepsilon} \qquad (\varepsilon = c\,dt).$$

$n = -1$. — L'aire infinitésimale balayée par le rayon de courbure est égale à

$$d\sigma = \frac{1}{2}\rho\,ds = \frac{1}{2}\rho v\,dt = \frac{1}{2}c\,dt.$$

$n = \pm\frac{1}{2}$. — On a

$$v^2 = c^2\rho \qquad \text{et} \qquad v^2 = \frac{c^2}{\rho}.$$

Il existe des courbes pour lesquelles les droites issues de leurs points et divisant dans un rapport constant les rayons de courbure correspondants de la développée passent par un point fixe. Ce sont les courbes de Cesàro qui renferment comme cas particulier les lignes de Ribaucour et les spirales sinusoïdes. Elles comprennent aussi les coniques à centre, puisque (théorème de Mac-Laurin) les diamètres des coniques divisent dans le rapport $\frac{1}{3}$ les rayons de courbure correspondants de la développée.

On est donc amené à se poser le problème suivant : *Un mobile décrit une courbe de Cesàro sous l'action d'une force passant constamment par le pôle, trouver la loi de cette force.* Dans le cas des coniques à centre, la force est proportionnelle au rayon vecteur, résultat bien connu.

M. **R. Goormaghtigh**. — *Sur une égalité d'arcs.* — MM. R. Bouvaist et H. Lebesgue ont signalé (*N. A.*, 1916, p. 319, 357) des théorèmes généraux renfermant comme cas particulier une proposition concernant l'équivalence des arcs d'une ellipse et d'un limaçon de Pascal, que M. Barisien avait démontrée (1916, p. 225). Le théorème général suivant renferme aussi cette propriété :

Les arcs de la développée intermédiaire d'indice λ *d'une courbe* C *d'équation intrinsèque* $f(s, \rho) = 0$ *sont égaux aux arcs correspondants de la courbe* C′ *d'équation cartésienne* $f\left[\frac{1}{\lambda}(1+\lambda)x, (1+\lambda)y\right] = 0$.

Si l'on prend comme axes mobiles des x et des y la tangente et la normale en un point M de C, et si γ désigne le centre de courbure de C en M, on voit facilement, au moyen des formules de Cesàro, que l'élément d'arc du lieu du point qui divise $M\gamma$ dans le rapport de 1 à λ est

$$(1) \qquad \frac{1}{1+\lambda}\sqrt{(\lambda\, ds)^2 + (d\rho)^2}.$$

En faisant correspondre au point (s, ρ) de C le point de C′ qui a pour coordonnées $\lambda s : (1+\lambda)$ et $\rho : (1+\lambda)$, on voit que l'expression (1) est aussi l'élément d'arc de C′, ce qui démontre le théorème.

En particulier, si l'on considère comme courbe C une cycloïdale, on retrouve le résultat obtenu par M. Lebesgue (1916, p. 358), notamment que la rectification des cycloïdales allongées ou raccourcies (trochoïdales) se ramène aux intégrales elliptiques. Il résulte, en effet, de l'équation intrinsèque des cycloïdales que C′ est dans ce cas une ellipse; d'autre part, les développées intermédiaires des cycloïdales sont

des trochoïdales de même module. D'une manière plus précise, on déduit facilement des considérations qui précèdent la proposition suivante, d'ailleurs connue [*voir* A. Gob, *Rectification des épitrochoïdes* (*Mém. de la Soc. des Sc. de Liége*, 1902)] :

Si l'on considère d'une part une trochoïdale de module n, roulette d'un point lié à un cercle de rayon r situé à une distance h du centre de ce cercle, et d'autre part l'ellipse de demi-axes $r+h$ et $r-h$, un arc de la trochoïdale vaut $2(1+n)$ fois l'arc correspondant de l'ellipse.

Pour $n=1$, on retrouve le cas du limaçon de Pascal.

M. **R. Goormaghtigh**. — *Sur l'orthopôle.* — La propriété du point de Feuerbach signalée par M. Thébault (*N. A.*, 1916, p. 499) peut être généralisée de la manière suivante. Sur un diamètre quelconque δ du cercle circonscrit à un triangle, il y a deux points I_1 et I_2, symétriques par rapport au centre du cercle circonscrit, tels que les droites qui joignent les sommets du triangle aux projections α_1, β_1, γ_1 et α_2, β_2, γ_2 de I_1 et I_2 sur les côtés correspondants soient concourantes en des points J_1 et J_2. Nous avons montré (*Journal de Vuibert*, 1913-1914, p. 110) que les coniques Σ_1 et Σ_2 qui touchent les côtés en α_1, β_1, γ_1 et en α_2, β_2, γ_2 passent par l'orthopôle de δ. Les points d'Hamilton correspondant à I_1 sont les intersections des côtés correspondants du triangle $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ et du triangle formé par les milieux des côtés du triangle fondamental. On a alors la proposition suivante :

Le triangle formé par les points d'Hamilton correspondant au point I_1 *est circonscrit au triangle*

fondamental et homologique à ce triangle; l'axe d'homologie est la tangente à la conique Σ_1 en l'orthopôle du diamètre δ.

Cette tangente est la transversale réciproque de la droite qui joint I_1 au centre de gravité du triangle.

M. **E. Jacquet**. — *Sur le problème de Pappus généralisé.* — Voici une autre solution de la question, traitée dans ce journal par M. Joffroy (1916, p. 168) et par M. J. Lemaire (1917, p. 133) :

Le problème revient évidemment à construire un triangle OAB (¹) dans lequel on connaît la base $AB = l$, l'angle opposé $AOB = \omega$ et la longueur de la bissectrice $OP = d$. Sur AB comme corde je décris l'arc AKB du segment capable de l'angle ω. La bissectrice OP passera par le milieu I du second arc AB. Or $IO - IP = OP = d$ et $IO . IP = \overline{IA}^2$. Nous sommes donc ramenés à construire deux longueurs, connaissant leur différence et leur produit. La circonférence décrite de I comme centre, avec la plus grande de ces longueurs comme rayon, coupe la première au point O cherché : le rayon de ce cercle est évidemment supérieur à IA.

La discussion est immédiate. La condition de possibilité est : $OP \leqq KC$, ou $d \leqq \frac{l}{2} \cot \frac{\omega}{2}$, ou enfin $l \geqq 2d \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}$.

Le point de rencontre P′ de la deuxième circonférence avec le prolongement de AB donne lieu à un deuxième triangle AO′B qui fournit les solutions de seconde espèce. Celles-ci existent toujours.

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

M. **N.-N. Parfentieff** (Kazan). — *Sur quelques formules asymptotiques.* — C'est un fait très connu que la notion arithmétique de l'intégrale peut conduire à un grand nombre de formules, exactes, ou quelquefois asymptotiques. La présente remarque a pour objet d'attirer l'attention du lecteur sur une série de ces formules asymptotiques.

La source de nos formules sera l'intégrale

$$\int_0^1 x^p \log x \, dk = -\frac{1}{(p+1)^2}. \tag{1}$$

D'autre part, arithmétiquement, on a

$$-\frac{1}{(p+1)^2} = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p \log\left(\frac{k}{n}\right),$$

et par suite, *asymptotiquement*, nous avons le droit d'écrire (¹)

$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p \log\left(\frac{k}{n}\right) \sim -\frac{1}{(p+1)^2},$$

c'est-à-dire

$$1^{1^p}.2^{2^p}.3^{3^p}\ldots n^{n^p} \sim e^{-\frac{1}{(p+1)^2}n^{p+1}}.n^{\sum_{k=1}^{n} k^p}, \tag{2}$$

formule asymptotique dont nous pouvons déduire une foule *d'égalités arithmétiques asymptotiques*.

Par exemple, en posant dans la formule (2), $p = 0$, nous arrivons à la formule célèbre de *Stirling*

$$1.2.3\ldots n = n! \sim e^{-n} n^n.$$

Ensuite, en posant $p = 1$, nous avons

$$1.2^2.3^3\ldots n^n \sim e^{-\frac{1}{4}n^2}.n^{\frac{1}{2}n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}. \tag{3}$$

(¹) Nous employons le signe $\sim$ pour l'égalité asymptotique.

Dans notre Livre *Études sur la théorie de la croissance des fonctions* publié en langue russe, nous avons donné la formule asymptotique suivante qui est une généralisation de la formule de Stirling :

$$\Gamma(1).\Gamma(2)\ldots\Gamma(n+1) \sim (\sqrt{2\pi})^n . e^{-\frac{n^2}{2}} . n^{\frac{n^2}{2}}.$$

En la comparant avec la relation (3), nous voyons qu'*asymptotiquement*

$$\Gamma(1).\Gamma(2).\Gamma(3)\ldots\Gamma(n+1) \sim 1.2^2.3^3.4^4\ldots n^n . e^{-\frac{1}{4}n^2}$$

ou

$$1^n.2^{n-1}.3^{n-2}.4^{n-3}\ldots(n-1)^2.n \sim 1^1.2^2.3^3.4^4\ldots n^n . e^{-\frac{1}{4}n^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1^1.2^2.3^3.4^4\ldots n^n}{1^n.2^{n-1}.3^{n-2}\ldots(n-1)^2.n} \sim e^{\frac{1}{4}n^2}.$$

Toutes ces formules, malgré leur simplicité, peuvent avoir des applications dans l'arithmétique des grands nombres.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1920 et 2257.

(1901, p. 48; 1915, p. 432.)

1920 [1]. *Le produit du rayon de courbure en un point d'une hyperbole par la distance du centre à la tangente correspondante est égal, en valeur absolue, au carré du segment de la tangente compris entre le point de contact et l'une des asymptotes.* M. D'OCAGNE.

---

[1] *Voir* une précédente solution (1915, p. 475).

2257. *Si, dans une hyperbole, la tangente au point* M *coupe une des asymptotes au point* T *et que le centre* O *se projette orthogonalement en* I *sur la normale en* M, *la perpendiculaire élevée en* T *à* IT *passe par le centre de courbure répondant au point* M. *Démontrer géométriquement ce théorème obtenu à titre d'application des coordonnées parallèles* (*Nouvelles Annales*, 1902, p. 232).

M. d'Ocagne.

Solution

Par un Abonné.

Soit b' la longueur du segment de tangente compris entre le point de contact et une asymptote. D'après un théorème classique b' est égal au demi-diamètre conjugué qui lui est parallèle.

D'autre part on a pour le rayon de courbure d'une conique à centre l'expression

$$\rho = \frac{b'^2}{p},$$

où p désigne la distance du centre à la tangente correspondante. Cette formule est susceptible d'une démonstration géométrique (*Voir* Salmon, *Sections coniques*, 2e édition, p. 642). Elle résout la question 1920.

Pour la question 2257, appelons C le point où la perpendiculaire élevée en T à IT coupe la normale. Le triangle rectangle ITC donne

$$MT^2 = MI \times MC.$$

Mais $MT = b'$ et $IM = p$, donc $MC = \rho$.

C. Q. F. D.

Voir plus loin (p. 197), une autre solution de la question 2257.

2249.

(1915, p. 288.)

En chaque point d'une courbe donnée on mène la tangente et l'on prend sur cette tangente une longueur MT *égale au rayon de courbure de la courbe en* M, *on demande de construire la tangente et le centre de courbure de la courbe, lieu du point* T, *quand* M *décrit la courbe donnée.*

F. Balitrand.

SOLUTION
Par M. R. BOUVAIST.

Soient

$$T = \quad x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0,$$
$$N = -x\sin\varphi + y\cos\varphi - p' = 0$$

la tangente et la normale à la courbe considérée en M; les coordonnées du point T seront

$$N = p + p'',$$
$$T = 0;$$

le coefficient angulaire de la normale tangente en ce point sera

$$-\frac{dT}{dN - (p' + p''')} = +\frac{p + p''}{(p + p'') + (p' + p''')};$$

si donc on prend sur la droite $\overline{MC_1}$, C_1 étant le centre de courbure de la courbe donnée en M, un segment $\overline{MK}$ égal à la somme des rayons de courbure de la courbe et de sa développée, KT sera la normale à la courbe lieu de T. Désignons par ρ_1 et ρ_2 les rayons de courbure, $p + p''$, $p' + p'''$. La droite KT a pour équation

$$\frac{-T}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{N}{\rho_1} = 1;$$

elle touchera son enveloppe en son point d'intersection avec la droite

$$\frac{\rho_2 + \rho_3}{\rho_1 + \rho_2}\left[\frac{T}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{N}{\rho_2 + \rho_3}\right] - \frac{\rho_2}{\rho_1}\left[\frac{N}{\rho_1} + \frac{T}{\rho_2}\right] - 1 = 0,$$

ρ_3 étant le rayon de courbure de la seconde développée de la courbe (M).

D'où la construction suivante : Prenons sur la droite $\overline{TM}$ le segment $\overline{MB} = \rho_2 + \rho_3$, la perpendiculaire en B à MT coupe la perpendiculaire à MK en K en D, prenons sur $\overline{C_1 M}$ un segment $\overline{MA} = \rho_2$, la parallèle à AT menée par C_1 coupe MD en I. La parallèle menée par B à MD et la parallèle menée par M à AT se coupent en I'. La droite II' coupe KT au centre de courbure de la courbe, lieu de T.

Autre solution par l'AUTEUR.

2250.

(1915, p. 288.)

Étant donnés une courbe plane (M) *et un point fixe* O *de son plan, de chaque point* M *de* (M) *avec* MO *pour rayon, on décrit un cercle qui coupe en* P *et* Q *la tangente et la normale en* M *à la courbe* (M). *Trouver* : 1° *le point où la droite* PQ *touche son enveloppe;* 2° *le centre de courbure de cette enveloppe.* F. Balitrand.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

Soient

$$\begin{aligned} T &= \quad x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0, \\ N &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi - p' = 0. \end{aligned}$$

Prenons le point O pour origine, pour axes la tangente et la normale en M à (M). Supposons par exemple que, C_1 étant le centre de courbure de (M) en M, nous portions les segments $\overline{MP}$ et $\overline{MQ}$ égaux à OM dans la direction $\overline{C_1M}$ et dans la direction faisant avec celle-ci l'angle $+\frac{\pi}{2}$; l'équation de PQ sera

$$N + T = \sqrt{p^2 + p'^2};$$

si nous désignons par ρ_1 le rayon de courbure MC_1, cette droite touchera son enveloppe en son point d'intersection avec la droite

$$N - T = \rho_1\left(1 + \frac{p'}{\sqrt{p^2+p'^2}}\right) = \rho_1\left[1 + \sin\widehat{OMC_1}\right];$$

cette dernière droite est la perpendiculaire abaissée sur PQ du point A de la normale, tel que le segment

$$\overline{MA} = \rho_1\left[1 + \sin\widehat{OMC_1}\right],$$

ce segment étant porté dans la direction $\overline{MC_1}$.

La normale

$$N -- T = \rho_1\left[1 + \sin\widehat{OMC_1}\right]$$

à l'enveloppe de PQ touche son enveloppe en son point d'in-

tersection avec la droite

$$T + N = -\left[\rho_1 + \rho_2 + \rho_2 \frac{p'}{\sqrt{p^2 + p'^2}} + \rho_1 \frac{p''}{\sqrt{p^2 + p'^2}} - \frac{p'^2 \rho_1^2}{(p^2 + p'^2)^{\frac{3}{2}}}\right],$$

en désignant par ρ_1 et ρ_2 les rayons de courbure de (M) et de sa développée en M. Cette droite est la parallèle à PQ menée par le point A′ de la normale en M à (M) tel que le segment $\overline{MA'}$ porté dans le sens $\overline{MC_1}$ soit égal à

$$\overline{MA'} = \rho_1 + \rho_2 + \rho_2 \sin \widehat{OMC_1} + \rho_1 \sin \widehat{OMC'_1} - \frac{\rho_1^2 \sin^2 \theta}{QM},$$

C'_1 étant l'un des points du cercle de diamètre OM, tel que OC'_1 soit égale à la distance de O ou la parallèle à la tangente à (M) en (M) menée par C_1. Cette expression de MA′ se construit immédiatement.

Autre solution par l'Auteur.

2253.

(1915, p. 431.)

Trouver les courbes planes telles que la projection, sur une droite de leur plan, d'une corde quelconque soit proportionnelle au segment, déterminé sur cette droite, par les deux normales à la courbe aux deux extrémités de la corde. F. Balitrand.

Solution
Par M. R. Bouvaist.

Prenons la droite donnée comme axe des x, nous aurons pour un point quelconque de la courbe

$$\frac{x + yy'}{x} = K,$$

équation dont l'intégrale générale est

$$x^2(K - 1) + y^2 = C.$$

Les courbes cherchées sont donc les coniques admettant pour axe la droite donnée.

Autres solutions par M. T. Ono et par l'Auteur.

2254.

(1915, p. 431.)

Soient O *le pôle et* Δ *l'asymptote d'une conchoïde de Nicomède (définie par la condition que si le vecteur* OM *coupe la droite* Δ *en* A, *le segment* MA *soit de longueur constante). On sait que la normale à la conchoïde en* M *passe par le point de rencontre* N *des perpendiculaires élevées en* O *à* OA *et en* A *à* Δ.

Cela posé, U *étant le milieu de* NA *et* V *le symétrique de* U *par rapport à* N, *si l'on mène par* U *et par* V *des parallèles respectivement à* OA *et à* Δ, *qui se coupent en* I *et qu'on élève en* N *à* MN *une perpendiculaire qui coupe* OM *en* K, *la droite* KI *passe par le centre de courbure* μ *correspondant au point* M *de la conchoïde.* M. d'Ocagne.

Solution
Par M. R. Bouvaist.

Menons par N une perpendiculaire à NA et par I une parallèle à NA, rencontrant cette perpendiculaire en K, et la droite ON en T; soit S l'intersection de IK avec NO.

Nous avons dans les triangles OK_1T, NOM :

$$\frac{KO}{KK_1}\,\frac{IK_1}{IT}\,\frac{ST}{SO}=1,\qquad \frac{SO}{SN}\,\frac{\mu N}{\mu M}\,\frac{KM}{KO}=1,$$

d'où

$$\frac{ST}{SO}=\frac{KK_1}{KO}\,\frac{IT}{IK_1}\qquad\text{et}\qquad \frac{\mu M}{\mu N}=\frac{SO}{SN}\,\frac{KM}{KO};$$

posons, pour abréger l'écriture,

$$OA=d,\qquad AM=l,\qquad ON=a,$$

nous aurons

$$\frac{KK_1}{KO}=\frac{AM}{OA}=\frac{l}{d},$$

$$\frac{IT}{IK_1}=1+\frac{K_1T}{IK_1}=1+\frac{2\,OK_1}{OA}=1+\frac{2\,\overline{ON}^2}{\overline{OA}^2}=1+\frac{2a^2}{d^2},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{OT}}{\mathrm{OS}} = \frac{l(2a^2 + d^2) + d^3}{d^3};$$

or

$$\mathrm{OT} = \frac{a^3}{d^2},$$

d'où

$$\mathrm{OS} = \frac{a^3 d}{l(2a^2 + d^2) + d^3},$$

d'où

$$\frac{\mu\mathrm{M}}{\mu\mathrm{N}} = \frac{d[a^2 + (d+l)^2]}{l(2a^2 + d^2) + ad(a^2 + d^2)},$$

d'où enfin

$$\mu\mathrm{M} = \frac{d}{l}\,\frac{[a^2 + (d+l)^2]^{\frac{3}{2}}}{d(d+l) - 2a^2}.$$

Or, si nous désignons par O_1 le symétrique de O par rapport à N, le cercle $\mathrm{NO}_1\mathrm{A}$ est évidemment le cercle des inflexions, relatif à la position considérée du segment invariable mobile AM; ce cercle coupe la normale NM en M_1 et en désignant par ρ le rayon de courbure de la conchoïde en M, nous aurons $\rho = \frac{\overline{\mathrm{NM}}^2}{\mathrm{MM}_1}$; or on a, en désignant par A′ l'intersection du cercle des inflexions avec OM_1,

$$\mathrm{ON}.\mathrm{OO}_1 = 2a^2 = \mathrm{OA}.\mathrm{OA}', \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{OA}' = \frac{2a^2}{d}$$

et

$$\mathrm{MM}_1.\mathrm{MN} = \mathrm{MA}.\mathrm{MA}', \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{MM}_1 = \frac{\mathrm{MA}.\mathrm{MA}'}{\mathrm{MN}}$$

et

$$\rho = \frac{\overline{\mathrm{MN}}^3}{\mathrm{MA}.\mathrm{MA}'} = \frac{d}{l}\,\frac{[a^2 + (d+l)^2]^{\frac{3}{2}}}{d(d+l) - 2a^2}.$$

Le point μ est donc bien le centre de courbure répondant au point M.

Autre solution par un Abonné.

2255.

(1915, p. 431.)

Étant données dans l'espace deux droites quelconques D *et* D′ *ne se rencontrant pas, on considère sur* D *un point*

fixe A *et sur* D′ *un point variable* B *d'où l'on abaisse sur* D *la perpendiculaire* BC. *Soit* E *l'ellipse dont* CA *et* CB *sont deux demi-axes. On demande de démontrer que :*

1° *La surface engendrée par l'ellipse* E *est un conoïde* Γ *dont on déterminera la directrice rectiligne et le plan directeur.*

2° *La section du conoïde* Γ *par tout plan parallèle à* D *est une cissoïde d'ellipse dont on déterminera les trois éléments de définition (ellipse, pôle et droite). On examinera à quelles conditions cette section peut devenir une cissoïde de cercle.*

Nota. — *On rappelle qu'une cissoïde d'ellipse, pour un pôle* O *situé sur cette ellipse, est une courbe lieu d'un point* M *tel que, si* OM *coupe l'ellipse en* M′ *et une certaine droite fixe en* M″, *on ait, en tenant compte du sens,* OM = M′M″.

M. d'Ocagne.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

Soient π le plan mené par D parallèlement à D′, Ax la droite menée par A perpendiculairement à D dans ce plan, Ay la perpendiculaire en A au plan DAx, α l'intersection de D′ avec Axy, B_1 son intersection avec DAy. La surface Γ contient visiblement les droites D et D′; étant de plus coupée par un plan passant par D suivant une ellipse (E), elle est du troisième ordre. Lorsque le point variable B vient en α, l'ellipse correspondante (Eα) devient la droite double Aα; lorsque B est à l'infini sur B′, l'ellipse correspondante (E∞) se décompose en la droite de l'infini du plan π et en la droite D. Un plan quelconque parallèle au plan π et rencontrant la génératrice double Aα en M coupera donc Γ suivant deux droites se coupant en M, qu'il est d'ailleurs facile de construire. Le plan DAy coupe la surface suivant une ellipse ayant pour demi-axes C_1A, C_1B_1, C_1 et B_1 étant les pieds de la perpendiculaire commune à D et D′; soit (E_1) cette ellipse, la trace du plan mené par M parallèlement à π coupe Ay en P, la parallèle à D menée par P coupe (E_1) en u et v, les droites Mu et Mv sont les deux génératrices de Γ situées dans le plan considéré. En résumé, Γ est un conoïde du troisième ordre dont Aα est la directrice rectiligne, π le plan directeur et que

l'ellipse E_1 achève de définir complètement. Ainsi défini on voit aisément qu'il contient Ax, que le plan parallèle à π mené par D lui est tangent le long de cette droite, et que le plan symétrique de celui-ci, par rapport à π, lui est aussi tangent le long d'une droite dont la projection sur le plan π est symétrique de la projection de D sur ce même plan.

2° Déterminons la section du conoïde Γ par un plan parallèle à D, dont la trace sur Axy coupe $A\alpha$ en R, $A\alpha$ en K, Ay en S. Considérons un plan parallèle à π dont la trace sur Axy rencontre $A\alpha$ en M, Ay en P, RKS en P'; soit u l'un des points d'intersection de la parallèle à D menée par P avec (E'), soit u' l'intersection de la génératrice Mu avec le plan sécant RKS, nous aurons

$$\frac{Pu}{P'u'} = \frac{MP}{MP'} = \frac{AP}{KP'}\,\frac{KR\,\mathrm{tang}\,\theta}{AR}, \qquad \text{en posant} \qquad \widehat{\alpha A y} = \theta;$$

nous avons de même

$$\frac{KP'}{KR} = \frac{KM}{AK} = \frac{AM - AK}{AK} = \frac{AP}{AK\cos\theta} - 1;$$

nous avons de plus, puisque le point u est sur l'ellipse (E_1), en posant $B_1C_1 = d$ et en désignant par h et φ la distance de α à Ay et l'angle de D' avec Axy,

$$\frac{\overline{AP}^2}{d^2} + \frac{\overline{Pu}^2}{h^2\,\mathrm{tang}^2\varphi} + \frac{2\,Pu}{h\,\mathrm{tang}\,\varphi} = 0,$$

d'où l'on déduit, en posant $KP' = y$, $Pu' = z$ et en observant que $\mathrm{tang}\,\theta = \dfrac{h}{d}$,

$$AK(y + KR)\left[\frac{y^2}{\overline{KR}^2} + \frac{z^2}{\overline{AR}^2\,\mathrm{tang}^2\varphi}\right] + \frac{2hy^2}{AR\sin\theta\,\mathrm{tang}\,\varphi} = 0,$$

ou, en posant $y = \rho\cos\omega$, $z = \rho\sin\omega$,

$$\rho + \frac{KR}{\cos\omega} + \frac{2\,\overline{KR}^2.AR.h\,\mathrm{tang}\,\varphi}{AK\sin\theta} \times \frac{\sin\omega}{\overline{AR}^2\,\mathrm{tang}^2\varphi\cos^2\omega + \overline{KR}^2\sin^2\omega} = 0,$$

équation d'une cissoïde d'ellipse ayant pour pôle le point K, pour droite l'intersection du plan sécant et du plan DAx, et pour ellipse l'ellipse

$$\frac{y^2}{\overline{\mathrm{KR}}^2} + \frac{z^2}{\overline{\mathrm{AR}}^2 \operatorname{tang}^2\varphi} + \frac{2hz}{\mathrm{AR}.\mathrm{AK} \operatorname{tang}\varphi \sin\theta} = 0.$$

Si $\overline{\mathrm{KR}}^2 = \overline{\mathrm{AR}}^2 \operatorname{tang}^2\varphi$, cette ellipse sera un cercle et la section une cissoïde de cercle, et les plans sécants correspondants resteront parallèles à un plan fixe.

2256.

(1915, p. 432.)

Si C *est le centre de courbure répondant à un point* P *d'une hyperbole équilatère de centre* O *et si* P′ *et* P″ *sont les pieds des deux autres normales menées de* C *à l'hyperbole, la corde* P′P″ *est :* 1° *parallèle à la normale* PC; 2° *vue de* P *sous un angle droit;* 3° *égale à* OC. *Après avoir démontré ces théorèmes, on en déduira une construction des points* P′ *et* P″ *lorsque* P *et par suite* C *est donné.*

M. d'Ocagne.

Solution
Par M. R. Bouvaist.

L'hyperbole d'Apollonius de C passant par les projections C_1 et C_2 de C sur les asymptotes de l'hyperbole considérée, par O et par C, aura pour centre le milieu ω de OC, cette hyperbole devant de plus être tangente à l'hyperbole donnée en P, la tangente à cette dernière en P et le diamètre Pω seront également inclinés sur les asymptotes de l'hyperbole donnée, Pω et OP sont deux rectangulaires. Si donc P_2 est le symétrique de O par rapport à OP, la perpendiculaire élevée en P_2 à OP coupe la normale PC en PC.

Soit P_1 le symétrique de P par rapport à O, les quatre points P, P_1, P′, P″ sont sur un même cercle, P′P″ et OP sont également inclinés sur les asymptotes de l'hyperbole donnée, P′P″ et PC sont donc parallèles et le triangle PP′P″ inscrit dans une hyperbole équilatère tangente en P à la hauteur PA de ce triangle est rectangle en P.

La perpendiculaire à OP en O et la perpendiculaire à Pω en ω sont les diamètres de la direction P′P″ dans l'hyperbole

donnée et dans l'hyperbole d'Apollonius de C; ces deux droites se coupent en I et nous avons

$$PI = \frac{P'P''}{2} = O\omega = \frac{OC}{2}.$$

En résumé, P_2 étant le symétrique de P par rapport à O, la perpendiculaire à OP en P_2 coupe la normale en P_1 au point C, ω étant le milieu de OC; les perpendiculaires à OP en O, à $P\omega$ en ω, se coupent en I; la parallèle à PC menée par I coupe le cercle de centre I et de rayon PI en P′ et P″.

Autres solutions par MM. Egan, J. Lemaire et T. Ono.

AUTRE SOLUTION
Par M. R. Bouvaist.

Si l'on observe que IT est le demi-diamètre conjugué de OM, la proposition à démontrer revient à la suivante :

Soient OM *et* OM′ *un couple de diamètres conjugués d'une conique de centre* O, *le diamètre* OM′ *est moyen proportionnel entre le rayon de courbure en* M *et la distance du centre à la tangente en* M.

Considérons en effet un cercle tangent à la conique en M et passant par un point A de cette conique; soit α le point où la parallèle à OM menée par A rencontre la tangente en M, soit A′ le second point d'intersection de ce cercle avec $A\alpha$; nous aurons

$$\overline{M\alpha}^2 = \alpha A . \alpha A';$$

nous aurons de même, en supposant que la conique considérée soit par exemple une ellipse,

$$\frac{\overline{M\alpha}^2}{\overline{OM'}^2} = \frac{(2OM - A\alpha)A\alpha}{\overline{OM}^2}; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\alpha A'}{\overline{OM'}^2} = \frac{2OM - A\alpha}{\overline{OM}^2};$$

si $A\alpha$ tend vers zéro, le cercle devient osculateur en M et l'on a, en désignant par A_1 son point d'intersection avec MO,

$$\frac{OA_1 . OM}{2} = \overline{OM'}^2,$$

ou, en désignant par ρ le rayon de courbure et d la distance de O à la tangente en M,

$$\overline{OM'}^2 = \rho\, d.$$

Remarque. — On voit facilement que l'énoncé de M. d'Ocagne peut se mettre sous la forme suivante :

Le cercle passant par l'intersection des asymptotes d'une hyperbole avec la tangente en un point M *de cette courbe et l'antiparallèle à cette tangente, par rapport aux asymptotes, menée par* M, *a pour centre le centre de courbure en* M.

Proposition due à Paul Serret (Géométrie de direction).

Autre solution par M. J. Lemaire.

2257.

(1915, p. 432.)

Si, dans une hyperbole, la tangente au point M *coupe une des asymptotes au point* T *et que le centre* O *se projette orthogonalement en* I *sur la normale en* M, *la perpendiculaire élevée en* T *à* IT *passe par le centre de courbure répondant au point* M.

Démontrer géométriquement ce théorème obtenu à titre d'application des coordonnées parallèles (*N. A.*, 1902, p. 232).

M. d'Ocagne.

Solution

Par M. Philbert du Plessis.

Si la tangente MT rencontre la seconde asymptote au point T′, le point M étant le milieu de TT′, on sait, d'après Mannheim, que si les perpendiculaires élevées aux asymptotes OT et OT′ par les points T et T′ coupent la normale en M aux points t et t', le centre de courbure m est le milieu de tt' (1).

(1) Le lecteur est prié de faire la figure dans l'hypothèse où les points t et t' sont d'un même côté par rapport au point M. S'il n'en était pas ainsi, il faudrait écrire $Mm = \frac{Mt' - Mt}{2}$. Mais on aurait alors $\frac{HT' - HT}{2} = TM$ et le résultat resterait le même.

On a donc

$$\mathrm{M}m = \frac{\mathrm{M}t + \mathrm{M}t'}{2}.$$

Abaissons du centre O la perpendiculaire OH sur la tangente TT′. Les triangles rectangles OTH et OT′H respectivement semblables à TtM et T′t'M donnent

$$\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{HT}} = \frac{\mathrm{TM}}{\mathrm{M}t}, \qquad \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{HT'}} = \frac{\mathrm{T'M}}{\mathrm{M}t'},$$

d'où, puisque T′M = TM,

$$\frac{\mathrm{M}t + \mathrm{M}t'}{2} = \frac{\mathrm{TM}(\mathrm{HT} + \mathrm{HT'})}{2\,\mathrm{OH}} = \frac{\overline{\mathrm{TM}}^2}{\mathrm{OH}},$$

ou enfin, si OI est la perpendiculaire abaissée de O sur la normale Mm,

$$\mathrm{M}m = \frac{\overline{\mathrm{TM}}^2}{\mathrm{IM}},$$

ce qui prouve que le triangle ITm est rectangle en T.

C. Q. F. D.

QUESTIONS.

2313. L'équation d'une conique étant $f(x, y, z) = 0$, on pose

$$f(x, x') = \frac{1}{2}[x' f'_x + \ldots].$$

Si au polygone des n côtés $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2, \ldots$ est circonscrit à la conique, on a

$$f(x_1, x_1) \times \ldots \times f(x_n, x_n) = (-1)^n f(x_1, x_2) \times \ldots \times f(x_n, x_1).$$

G. Fontené.

2314. Deux points A et B marqués sur une droite décrivent

deux droites rectangulaires $y'y$ et $x'x$; un point M marqué sur la droite décrit une ellipse. Si l'on désigne par x_1 et y_1 les coordonnées du point à la droite AB et tangente à son enveloppe, par x_2 et y_2 les coordonnées du centre de courbure en M, on a, en posant $\overline{MA} = a$, $\overline{MB} = b$:

$$\frac{y_2}{x_2} : \frac{y_1}{x_1} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{a+b}{a}, \qquad \frac{y_2}{y_1} = \frac{a+b}{b}.$$

G. Fontené.

2315. Les droites sur lesquelles quatre plans donnés déterminent une division de rapport anharmonique constant forment un complexe du second degré. Si les quatre plans sont les plans des faces du tétraèdre de référence, l'équation du complexe est

$$\frac{ps}{A} = \frac{qt}{B}\left(= \frac{ru}{C}\right) \qquad \text{avec} \qquad A + B + C = 0.$$

G. Fontené.

2316. Soient α, β, γ les points où un diamètre δ du cercle circonscrit à un triangle ABC coupe les côtés; α', β', γ' les symétriques de α, β, γ par rapport au centre du cercle ABC; α'', β'', γ'' les inverses triangulaires de α', β', γ'. Démontrer que les segments $A\alpha''$, $B\beta''$, $C\gamma''$ sont parallèles et que leurs milieux appartiennent à une droite qui passe par l'orthocentre du triangle et par l'orthopôle du diamètre δ.

R. Goormaghtigh.

2317. Sur la symétrique d'une tangente quelconque à une parabole, par rapport au foyer, il y a trois points P_1, P_2, P_3 dont les distances P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3 à la courbe sont respectivement égales à leurs distances P_1F, P_2F, P_3F au foyer. Démontrer que les points M_1, M_2, M_3 sont concycliques.

R. Goormaghtigh.

2318. Démontrer que le rayon vecteur OM, d'un point M d'une cissoïde droite, ayant O pour point de rebroussement, et la perpendiculaire à l'asymptote menée par le centre de courbure correspondant à M, se coupent sur une parallèle

à l'asymptote. En déduire une construction du centre de courbure en un point d'une cissoïde. F. Balitrand.

2319. Soit Σ une conique touchant les deux tangentes au point double d'une cubique nodale C_3, les six points de contact de C_3 avec ses tangentes communes avec Σ sont sur une conique Σ_1. Les points d'intersection de Σ_1 avec les tangentes au point double sont sur une conique Σ_2, qui est circonscrite au triangle formé par les tangentes d'inflexion de C_3. Proposition corrélative. R. Bouvaist.

2320. Soit M un point d'une cubique nodale, la polaire de M par rapport aux tangentes au point double et la tangente en M à la courbe se coupent en P, les trois autres tangentes menées de P à la cubique ont leurs points de contact en ligne droite et cette droite enveloppe la conique inscrite dans le triangle des tangentes d'inflexion et qui touche les tangentes au point double. Proposition corrélative. R. Bouvaist.

2321. Soient C_3 une cubique nodale, M un point de la courbe; la polaire de M par rapport au triangle formé par les trois tangentes d'inflexion rencontre la droite joignant les trois points d'inflexion en T; TM est la tangente en M à la cubique C_3.

R. Bouvaist.

ERRATA.

Page 153, ligne 3 en remontant, *au lieu de* en, *lire* le.

Page 154, ligne 1, *au lieu de* tractice, *lire* tractrice.

Page 160, ligne 6 en remontant, *au lieu de* structure, *lire* striction.

[T1]

LE PRINCIPE DE RELATIVITÉ [1];

Par M. R. BRICARD.

INTRODUCTION.

1. Le principe de Doppler-Fizeau, tel qu'il est ordinairement énoncé, implique la notion du mouvement absolu, ou tout au moins de mouvement par rapport à l'éther. L'application de ce principe devrait conduire à déceler de tels mouvements, par des expériences suffisamment délicates.

L'expérience célèbre de Michelson (1881-1887), instituée pour mettre en évidence l'influence du mouvement de la Terre sur la vitesse apparente de la lumière, a donné un résultat négatif. On a été conduit à penser qu'il en serait de même, de quelque manière qu'on variât l'expérience, et que les lois de la nature nous condamnent à ne connaître que des *mouvements*

[1] La plupart des Ouvrages sur la Relativité s'adressent à un public assez restreint, parce qu'ils font appel à des connaissances étendues en Physique mathématique.

Le travail suivant a été rédigé en vue d'initier le lecteur, peu familier avec cette dernière science, à l'une des conceptions modernes les plus intéressantes et les plus hardies. Comme le but poursuivi était avant tout d'introduire, le plus simplement possible, les notions, au premier abord déconcertantes, de la *contraction longitudinale* et du *temps local*, je me suis borné à l'étude de la Relativité dans l'espace à une dimension. On trouvera l'application des principes à l'espace à trois dimensions dans les Ouvrages spéciaux (les plus récents sont, je crois : *Relativity*, de A.-W. Conway, et *Le Principe de relativité*, de E.-M. Lémeray).

…ys (de corps matériels). C'est en cela que consiste le *Principe de relativité*.

2. Pour préciser les hypothèses ou postulats, d'accord avec ce principe, qui ne conduisent à rien de moins qu'à modifier les notions fondamentales de durée et de longueur, nous imaginerons des *laboratoires*, réduits pour plus de simplicité à des droites orientées O_0x_0, Ox, O_1x_1, ... toutes de même sens et glissant les unes sur les autres. A ces laboratoires sont attachés des observateurs A_0, A, A_1, ... qui disposent de *règles* pour mesurer les longueurs et de *chronomètres* pour mesurer les durées. Chaque observateur possède une confiance absolue dans ses instruments, c'est-à-dire que, pour lui, ses règles ont des longueurs invariables et que des durées indiquées comme égales par ses chronomètres sont en effet telles. En outre, les instruments des divers laboratoires ont été réglés les uns sur les autres. Les observateurs ont pu le faire aux instants où leurs laboratoires se pénétraient mutuellement (le point O venant, par exemple, coïncider avec le point O_0), et en suspendant leur mouvement relatif pendant un temps qu'on peut supposer aussi court qu'on veut. Ils ont alors vérifié qu'ils attribuaient bien 1 mètre à la même longueur et 1 seconde à la même durée.

Chacun des observateurs, *supposant son laboratoire absolument fixe*, peut évaluer, au moyen de ses instruments, les vitesses des autres laboratoires. Nous supposerons les circonstances telles que pour A_0, par exemple, les laboratoires A, A_1, ... aient des vitesses *constantes* u, u_1, ... Nous énoncerons alors le postulat suivant :

Dans ces conditions, les vitesses de A_0, *mesurées*

par A, A_1, ..., *sont évaluées respectivement à* — u, — u_1, ... (*avec les conventions de signe ordinaires*).

Plus généralement, imaginons que les observateurs A_0 et A, par exemple, instituent une expérience, conduisant à des mesures de longueurs et de durées, faites en partie dans le laboratoire O_0x_0 et en partie dans le laboratoire Ox. En particulier, cette expérience peut être une mesure de la vitesse de la lumière. L'expérience, quelle qu'elle soit, sera ensuite répétée en échangeant les rôles des laboratoires, toutes les circonstances en restant d'ailleurs identiques. Aux longueurs et aux durées mesurées primitivement dans le laboratoire O_0x_0 correspondent des longueurs et des durées mesurées dans le laboratoire Ox, et réciproquement. Cela posé, nous admettrons que :

Toutes les évaluations correspondantes de durées et de longueurs sont identiques.

C'est là le véritable postulat fondamental de la théorie de la relativité. Il comprend le premier. Il a aussi cette conséquence immédiate :

Pour les observateurs A_0 *et* A, *et plus généralement pour tous les observateurs* A_n, *la vitesse de la lumière a la même valeur numérique.*

Pour simplifier les formules ultérieures, nous supposerons les unités de longueur et de temps tellement choisiés, que cette valeur numérique soit égale à l'unité. Nous appellerons *seconde* l'unité de temps.

3. Des divers laboratoires nous en choisirons un, O_0x_0 (observateur A_0) dont nous dirons qu'il est en *repos absolu*. Les autres laboratoires seront dits *mo-*

biles. Nous appellerons *longueurs absolues* et *durées absolues* les valeurs numériques des longueurs et des durées mesurées par A_0. Les valeurs numériques des longueurs et des durées mesurées par $A, A_1, \ldots$ seront dites *relatives*. Autrement dit, des illusions de nature identique, mais contradictoires, qui ont cours dans les divers laboratoires, nous adopterons celle de A_0, pour la commodité du langage.

Cela posé, l'étude des conséquences logiques du postulat nous conduira aux conclusions suivantes :

1° La valeur relative d'une durée est toujours plus *faible* que sa valeur absolue. Autrement dit, les chronomètres des laboratoires mobiles sont nécessairement *ralentis* par le fait même de leur mouvement.

2° La valeur relative d'une longueur est toujours plus *forte* que sa valeur absolue. Autrement dit, les règles des laboratoires mobiles sont nécessairement *raccourcies* par le fait même de leur mouvement.

3° Le mouvement détruit jusqu'à la perception même de la simultanéité, en ce sens que deux phénomènes, se passant en des points différents et considérés comme simultanés par un observateur mobile, ne le sont pas en réalité.

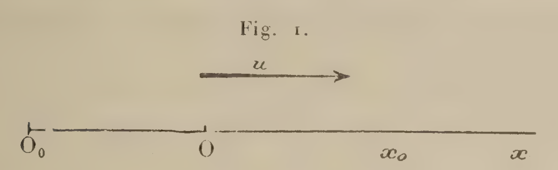
I. — Mesure du temps; ralentissement des chronomètres mobiles.

4. Pour établir le ralentissement des chronomètres mobiles, imaginons que les observateurs A_0 et A fassent l'expérience suivante, qui n'est autre qu'une application du principe de Doppler-Fizeau (*fig.* 1) :

Les deux observateurs ont placé des chronomètres respectivement en O_0 et O. Ces chronomètres ont été réglés l'un sur l'autre, comme il a été dit, et l'on peut

supposer qu'ils marquaient l'heure zéro quand le point O se trouvait en O_0. Ox étant en mouvement, l'observateur A_0 émet du point O_0 un signal lumineux

Fig. 1.



toutes les secondes. Ces signaux sont reçus en O, et l'observateur A note au moyen de son chronomètre l'intervalle de temps qui sépare deux réceptions consécutives. L'expérience est ensuite répétée, en échangeant les rôles des deux observateurs. C'est-à-dire que A émet toutes les secondes un signal lumineux du point O. Ces signaux sont reçus en O_0 et A_0 note l'intervalle de temps qui sépare deux réceptions consécutives.

Il faut, d'après le postulat fondamental de la relativité, que les intervalles de temps mesurés par les deux observateurs soient égaux. Or, nous allons voir qu'il n'en serait pas ainsi, si les marches des deux chronomètres restaient identiques, comme on le suppose dans les théories ordinaires.

En effet, supposons que l'observateur A_0 émette du point O_0 un signal à l'instant t. Soit x l'instant auquel ce signal est reçu en O. A cet instant, on a, en appelant toujours u la vitesse du laboratoire Ox,

$$O_0O = ux.$$

La lumière a franchi cette distance dans le temps $x - t$. On a donc (on rappelle que la vitesse de la lumière est égale à l'unité)

$$x - t = ux,$$

d'où

$$x = \frac{t}{1 - u}.$$

Un nouveau signal émis à l'heure $t + 1$ sera reçu à l'heure

$$x' = \frac{t + 1}{1 - u},$$

et l'on a

(1) $$x' - x = \frac{1}{1 - u}.$$

Telle est la valeur de l'intervalle de temps qui sépare deux réceptions consécutives en O.

D'autre part, un signal émis du point O à l'instant t doit franchir la distance ut pour arriver en O_0. Il arrive donc à l'instant

$$y = t + ut = (1 + u)t.$$

Un signal émis à l'instant $t + 1$ arrive à l'instant

$$y' = (1 + u)(t + 1);$$

l'intervalle de temps qui sépare deux réceptions consécutives en O_0 est donc égal à

(2) $$y' - y = 1 + u.$$

L'intervalle (2) est plus petit que l'intervalle (1). On a en effet

$$0 < 1 - u^2 < 1 \quad (^1),$$

---

(1) La première de ces inégalités implique que la vitesse du point O est plus petite que la vitesse de la lumière. En effet, si l'on avait $u \geqq 1$, les signaux émis par O_0 n'arriveraient jamais au point O, tandis que les signaux émis par O continueraient à arriver au point O_0 en des temps finis. La dissymétrie de l'expérience serait incompatible avec le postulat.

Ainsi, nous pouvons noter cette conséquence du principe :

Aucune vitesse matérielle ne peut atteindre celle de la lumière.

d'où

$$1 + u < \frac{1}{1 - u}.$$

Nous sommes en contradiction avec le postulat. On ne voit qu'une manière de rétablir l'accord : il faut que, par le fait du mouvement, le chronomètre placé en O se soit *ralenti*, de telle manière que l'observateur A attribue aux intervalles de temps (2) la même valeur que l'observateur A_0 aux intervalles (1), bien que les premiers soient plus longs.

5. Cherchons la loi de ce ralentissement. Appelons λ la valeur absolue d'une seconde relative, marquée par le chronomètre O. Il faut calculer λ.

En premier lieu, la formule (1) donne la valeur absolue de l'intervalle de temps mesuré par A. Cet observateur attribuera à ce même intervalle la valeur

$$\frac{1}{\lambda} \frac{1}{1 - u}.$$

En second lieu, A, croyant émettre des signaux toutes les secondes, les émet en réalité toutes les λ secondes. L'intervalle de temps mesuré par A_0 est donc donné par le second membre de la formule (2), multiplié par λ, et il est égal à

$$\lambda(1 + u).$$

Il faut que les deux valeurs que nous venons d'écrire soient égales. On a par suite

$$\lambda(1 + u) = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{1 - u},$$

d'où

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Telle est la loi du ralentissement. On lui donne une forme se prêtant mieux aux calculs ultérieurs en introduisant les fonctions hyperboliques.

Posons

$$(3) \qquad \operatorname{th}\varphi = u.$$

Nous dirons que le nombre bien déterminé φ est l'*argument hyperbolique de la vitesse* u. On en tire

$$(4) \qquad \lambda = \operatorname{ch}\varphi.$$

Ainsi, un chronomètre en mouvement se ralentit nécessairement, de telle sorte que la valeur absolue d'une seconde marquée par lui soit égale à $\operatorname{ch}\varphi$, φ *étant l'argument hyperbolique de la vitesse de ce chronomètre.*

On peut dire aussi que, si t et t_0 sont les valeurs attribuées à une même durée par l'observateur A et par l'observateur A_0, on a

$$t = \frac{t_0}{\operatorname{ch}\varphi}.$$

6. *Remarque.* — Au point de vue de A_0, le chronomètre de A marche trop lentement. Le postulat exige alors qu'au point de vue de A, le chronomètre de A_0 marche aussi trop lentement. Il y a là une contradiction apparente qui sera élucidée plus tard.

7. *Exercice.* — Imaginons que deux observateurs mobiles, A et A_1, fassent l'expérience suivante : leurs chronomètres étant réglés tous deux sur celui de A_0, chacun d'eux convient d'émettre un signal lumineux à l'instant t marqué par son chronomètre. Vérifier que chacun des deux observateurs lit bien la même heure t_1

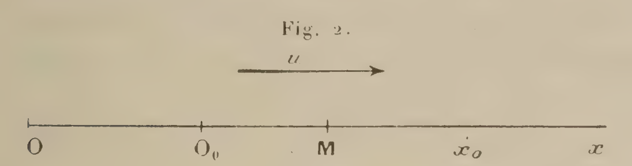
sur son chronomètre, au moment où il reçoit le signal de l'autre.

II. — Mesure des longueurs; contraction longitudinale.

8. Le raccourcissement des règles mobiles (et en général de tous les segments entraînés avec le laboratoire Ox) est une conséquence nécessaire du ralentissement des chronomètres.

Considérons, en effet, un point M (*fig.* 2) entraîné

Fig. 2.



avec le laboratoire Ox, et imaginons que l'observateur A fasse l'expérience suivante. En M il place un miroir pouvant réfléchir en O la lumière émanée de ce point. Soit x la longueur *qu'il attribue* au segment OM. A émet un signal lumineux au point O, où se trouve placé un chronomètre, et mesure avec cet instrument le temps t nécessaire à la lumière pour faire le trajet OM + MO. Puisque pour tout observateur la vitesse de la lumière est égale à 1, on doit avoir

$$t = 2x.$$

Évaluons, d'autre part, le temps absolu t_0 nécessaire à la lumière pour faire ce double trajet. Pour A, tout se passe comme si la lumière allait de O en M avec la vitesse $1 - u$ et de M en O avec la vitesse $1 + u$. Si donc x_0 est la longueur absolue de OM, on a

$$t_0 = x_0\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right) = \frac{2x_0}{1-u^2} = 2x_0 \operatorname{ch}^2\varphi.$$

Mais t et t_0 sont les mesures d'une même durée, faites respectivement par A et par A_0. On a donc (n° 5)

$$t = \frac{t_0}{\operatorname{ch} \varphi},$$

d'où

$$x = x_0 \operatorname{ch} \varphi, \qquad x_0 = \frac{x}{\operatorname{ch} \varphi}.$$

Ainsi la longueur absolue d'un segment mobile est égale à sa longueur relative réduite dans le rapport de ch φ *à* 1. *Cela exige que la règle avec laquelle* A *mesure cette longueur se soit réduite, par le fait du mouvement, dans le même rapport.*

On donne à ce phénomène le nom de *contraction longitudinale.*

9. Ce résultat donne lieu à une contradiction apparente, semblable à celle que nous avons signalée à propos des mesures de durée : au point de vue de A_0, les règles de A se sont réduites de longueur. Il faut donc qu'au point de vue de A, les règles de A_0 se soient également réduites. Cette contradiction sera élucidée en même temps que l'autre.

III. — Le temps local.

10. Jusqu'à présent, nous avons supposé l'observateur A en possession d'un seul chronomètre, placé en O. Imaginons maintenant qu'il en place un autre en un point M, d'abscisse relative x (*fig.* 2). Comment s'y prendra-t-il pour le mettre à l'heure sur le premier?

Réponse : De telle manière que la vitesse de la lumière lui paraisse égale à 1. Si donc il émet un

signal lumineux du point M, à l'instant où le chronomètre placé en ce point marque t, ce signal doit atteindre le point O à l'instant où le chronomètre de ce point marque $t+x$.

Proposons-nous le problème suivant : *Quelle est l'heure absolue* t_0 *à l'instant où le chronomètre placé en* M *marque* t?

Nous supposons toujours que le point O est passé en O_0 à l'heure zéro, et qu'à cet instant le chronomètre O marquait également zéro.

La longueur absolue du segment OM est $\frac{x}{\operatorname{ch}\varphi}$. Pour l'observateur A_0, la lumière franchit cette distance avec la vitesse $1+u$. Elle atteint donc le point O à l'heure absolue

$$t_0+\frac{x}{\operatorname{ch}\varphi(1+u)}=t_0+\frac{x}{\operatorname{ch}\varphi(1+\operatorname{th}\varphi)}=t_0+\frac{x}{\operatorname{ch}\varphi+\operatorname{sh}\varphi}.$$

Mais, à cet instant, au point O, l'heure relative est égale à l'heure absolue divisée par $\operatorname{ch}\varphi$. Cette heure doit d'autre part, comme on l'a dit, être égale à $t+x$. On a donc

$$\operatorname{ch}\varphi(t+x)=t_0+\frac{x}{\operatorname{ch}\varphi+\operatorname{sh}\varphi},$$

d'où

$$t_0=\left(\operatorname{ch}\varphi-\frac{1}{\operatorname{ch}\varphi+\operatorname{sh}\varphi}\right)x+\operatorname{ch}\varphi\, t.$$

Le coefficient de x se réduit à

$$\frac{\operatorname{ch}^2\varphi+\operatorname{ch}\varphi\operatorname{sh}\varphi-1}{\operatorname{ch}\varphi+\operatorname{sh}\varphi}=\frac{\operatorname{sh}^2\varphi+\operatorname{ch}\varphi\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{ch}\varphi+\operatorname{sh}\varphi}=\operatorname{sh}\varphi.$$

Donc finalement

$$t_0=\operatorname{sh}\varphi\, x+\operatorname{ch}\varphi\, t. \tag{5}$$

La formule (5) établit donc le résultat signalé au

n° 3 : deux phénomènes ayant lieu en des points différents et considérés par A comme simultanés ne le sont pas en réalité (c'est-à-dire pour A_0). En effet t_0 dépend non seulement de t, mais de x.

On dit que t est l'*heure locale* au point M.

IV. — Formules fondamentales.

11. Les formules fondamentales dont il s'agit établissent les relations entre les *coordonnées relatives* et les *coordonnées absolues* d'un phénomène. Voici ce qu'il faut entendre par là :

Tout phénomène instantané ayant lieu au point M est caractérisé, pour l'observateur A, par l'abscisse x (relative, bien entendu) du point M et par l'heure locale t à laquelle se produit le phénomène.

Cette abscisse et cette heure locale sont les *coordonnées relatives* du point M.

Le phénomène a, pour A_0, deux coordonnées absolues, qui sont l'abscisse absolue x_0 du point M et l'heure absolue t_0 à laquelle se produit le phénomène.

Proposons-nous de calculer x_0 et t_0, connaissant x et t.

Le problème a déjà été résolu pour t_0 [formule (5)].

Pour avoir x_0, il suffit d'écrire que

$$\text{long. abs. de } O_0M = \text{long. abs. de } O_0O + \text{long. abs. de } OM.$$

Mais

$$\text{long. abs. de } O_0M = x_0,$$
$$\text{long. abs. de } O_0O = ut_0 = \operatorname{th}\varphi\, t_0,$$
$$\text{long. abs. de } OM = \frac{x}{\operatorname{ch}\varphi}.$$

Donc

$$x_0 = \operatorname{th}\varphi\, t_0 + \frac{x}{\operatorname{ch}\varphi}, \tag{6}$$

ou, d'après la formule (5),

$$x_0 = \operatorname{th}\varphi(\operatorname{sh}\varphi\, x + \operatorname{ch}\varphi\, t) + \frac{x}{\operatorname{ch}\varphi} = \frac{\operatorname{sh}^2\varphi + 1}{\operatorname{ch}\varphi} x + \operatorname{sh}\varphi\, t$$

et, finalement,

$$x_0 = \operatorname{ch}\varphi + \operatorname{sh}\varphi\, t.$$

Telle est la seconde des formules fondamentales que nous voulions obtenir. Récrivons-les :

$$x_0 = \operatorname{ch}\varphi\, x + \operatorname{sh}\varphi\, t, \tag{7}$$

$$t_0 = \operatorname{sh}\varphi\, x + \operatorname{ch}\varphi\, t. \tag{8}$$

On les résout immédiatement en x et t, en tenant compte de ce que

$$\operatorname{ch}^2\varphi - \operatorname{sh}^2\varphi = 1.$$

Il vient ainsi

$$x = \operatorname{ch}\varphi\, x_0 - \operatorname{sh}\varphi\, t_0, \tag{9}$$

$$t = -\operatorname{sh}\varphi\, x_0 + \operatorname{ch}\varphi\, t_0. \tag{10}$$

On voit qu'on passe des formules (7) et (8) aux formules (9) et (10) en permutant x et x_0, t et t_0, et en changeant φ en $-\varphi$. C'est bien ce qu'exige le principe de relativité.

12. *Remarque.* — On pouvait arriver plus rapidement aux formules fondamentales. Comme on l'a vu, on peut écrire immédiatement la formule (6), qui n'est autre que la formule (9). L'application du postulat fondamental conduit alors à la formule (7), et les formules (8) et (10) résultent des deux précédentes par des combinaisons simples. Mais on perd peut-être ainsi en clarté ce qu'on gagne en concision.

13. *Application.* — Il est maintenant facile d'élucider les paradoxes signalés au n° 6 et au n° 9.

1° Si A_0 observe constamment le chronomètre mo-

bile placé en O, et A, le chronomètre fixe placé en O_0, chacun des observateurs estimera que le chronomètre de l'autre retarde.

En effet, faisons dans la formule (8) $x = 0$. Il vient

$$t_0 = \operatorname{ch}\varphi\, t, \qquad \text{d'où} \qquad t_0 > t.$$

Donc le chronomètre placé en O est en retard, au point de vue de A_0. Faisons maintenant $x_0 = 0$ dans la formule (10). Il vient

$$t = \operatorname{ch}\varphi\, t_0, \qquad \text{d'où} \qquad t > t_0.$$

Ainsi A_0 arrive bien à une constatation semblable. La contradiction apparente s'explique, quand on a bien saisi la notion du temps local. A a raisonné comme si le chronomètre placé en O et celui qu'à un certain moment il place en O_0 pour comparer celui de A_0 étaient d'accord : aux yeux de A_0, il se trompe. Celui-ci, d'ailleurs, commet exactement la même erreur aux yeux de A.

Les égalités précédentes paraissent incompatibles, à cause d'un simple vice de notation : t et t_0 *n'y ont pas les mêmes valeurs*.

2° Imaginons maintenant que A_0 et A possèdent deux règles auxquelles ils attribuent la même longueur l. *Je dis que chacun des observateurs trouvera la règle de l'autre plus courte que la sienne.*

Soient, en effet, M et M′ les extrémités de la règle mobile, x et x' leurs abscisses relatives. On a par hypothèse

$$x' - x = l.$$

Pour apprécier la longueur absolue de cette règle, A_0 notera les abscisses absolues x_0 et x'_0 de ses deux extrémités à un même instant t_0. Il écrira alors, en

vertu de la formule (9),

$$x' = \operatorname{ch}\varphi\, x'_0 - \operatorname{sh}\varphi\, t_0,$$
$$x = \operatorname{ch}\varphi\, x_0 - \operatorname{sh}\varphi\, t_0,$$

d'où, par soustraction,

$$x'_0 - x_0 = \frac{x' - x}{\operatorname{ch}\varphi} = \frac{l}{\operatorname{ch}\varphi}.$$

Donc pour A_0, la règle mobile a une longueur inférieure à l.

De même, la règle fixe a des extrémités dont les abscisses absolues ξ_0 et ξ'_0 satisfont à l'égalité

$$\xi'_0 - \xi_0 = l.$$

Pour en mesurer la longueur, A notera les abscisses relatives ξ et ξ' de ses extrémités, quand les heures locales en ces points ont une même valeur θ. Il obtient alors, par application de la formule (7),

$$\xi'_0 = \operatorname{ch}\varphi\, \xi' + \operatorname{sh}\varphi\, \theta,$$
$$\xi_0 = \operatorname{ch}\varphi\, \xi + \operatorname{sh}\varphi\, \theta,$$

d'où

$$\xi' - \xi = \frac{\xi'_0 - \xi_0}{\operatorname{ch}\varphi} = \frac{l}{\operatorname{ch}\varphi},$$

et il aboutit à la même conclusion que A_0.

La contradiction apparente s'explique toujours de la même manière : A a cru noter sur une échelle divisée les passages *simultanés* de deux points, alors qu'en réalités ces passages étaient *successifs*.

V. — Formules fondamentales de cinématique.

14. Soit M un point mobile par rapport au laboratoire Ox. Son mouvement sera défini par une relation

$$x = f(t)$$

entre ses coordonnées, abscisse relative et heure locale.

Les formules de transformation (9) et (10) permettent d'obtenir l'équation du mouvement absolu de ce point.

La vitesse et l'accélération relatives du point M seront définies par les expressions ordinaires $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{d^2x}{dt^2}$. Les vitesse et accélération absolues seront de même $\frac{dx_0}{dt_0}$ et $\frac{d^2x_0}{dt_0^2}$.

15. *Composition des vitesses.* — On peut mettre sous une forme simple la relation qui existe entre la vitesse relative et la vitesse absolue d'un point.

Posons à cet effet

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{th}\theta, \tag{11}$$

$$\frac{dx_0}{dt_0} = \operatorname{th}\theta_0, \tag{12}$$

θ et θ_0 étant les arguments hyperboliques de ces deux vitesses. On a, en différentiant les relations (7) et (8),

$$dx_0 = \operatorname{ch}\varphi\, dx + \operatorname{sh}\varphi\, dt, \tag{13}$$

$$dt_0 = \operatorname{sh}\varphi\, dx + \operatorname{ch}\varphi\, dt \tag{14}$$

(en n'oubliant pas que φ est une constante); donc

$$\frac{dx_0}{dt_0} = \frac{\operatorname{ch}\varphi\, dx + \operatorname{sh}\varphi\, dt}{\operatorname{sh}\varphi\, dx + \operatorname{ch}\varphi\, dt} = \frac{\operatorname{ch}\varphi \frac{dx}{dt} + \operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{sh}\varphi \frac{dx}{dt} + \operatorname{ch}\varphi},$$

et, en introduisant θ et θ_0,

$$\operatorname{th}\theta_0 = \frac{\operatorname{th}\theta + \operatorname{th}\varphi}{1 + \operatorname{th}\varphi \operatorname{th}\theta} = \operatorname{th}(\theta + \varphi), \tag{15}$$

d'où

$$\theta_0 = \theta + \varphi. \tag{16}$$

Ainsi, l'argument hyperbolique de la vitesse absolue est égal à l'argument hyperbolique de la vitesse relative augmenté de celui de la vitesse d'entraînement du laboratoire Ox.

On voit donc que la composition des vitesses (sur une droite) s'exprime par la formule d'addition des tangentes hyperboliques [1].

16. *Accélération relative et accélération absolue.* — Pour calculer la seconde, connaissant la première, nous tirons d'abord de la relation (14)

$$(17)\qquad \frac{dt_0}{dt} = \operatorname{sh}\varphi \frac{dx}{dt} + \operatorname{ch}\varphi = \operatorname{sh}\varphi \operatorname{th}\theta + \operatorname{ch}\varphi$$

$$= \frac{\operatorname{ch}(\theta + \varphi)}{\operatorname{ch}\theta} = \frac{\operatorname{ch}\theta_0}{\operatorname{ch}\theta}.$$

On a ensuite, en dérivant les relations (11) et (12), la première par rapport à t, la seconde par rapport à t_0,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\theta} \frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{d^2 x_0}{dt_0^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\theta_0} \frac{d\theta_0}{dt_0} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\theta_0} \frac{d\theta_0}{dt} \frac{dt}{dt_0};$$

d'où, en vertu de la formule (17),

$$\frac{d^2 x_0}{dt_0^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^3\theta_0} \frac{d\theta_0}{dt} \operatorname{ch}\theta.$$

Mais il résulte de la formule (16) qu'on a

$$\frac{d\theta_0}{dt} = \frac{d\theta}{dt}.$$

On trouve donc, en divisant les deux expressions

[1] La formule (16) montre que, si θ est constant, θ_0 l'est également. Aussi un mouvement uniforme pour A l'est aussi pour A_0.

trouvées pour $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2x_0}{dt_0^2}$,

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{d^2x_0}{dt_0^2}} = \frac{\text{ch}^3\theta_0}{\text{ch}^3\theta},$$

ce qu'on peut écrire

$$\text{ch}^3\theta_0 \frac{d^2x_0}{dt_0^2} = \text{ch}^3\theta \frac{d^2x}{dt^2}, \tag{18}$$

formule qui résout le problème.

VI. — Dynamique de la relativité.

17. Il est clair que les hypothèses de la dynamique ordinaire sont incompatibles avec le principe de relativité. Il suffit pour le faire voir de remarquer que ces hypothèses, appliquées à l'étude du mouvement d'un point soumis à une force de grandeur constante, conduisent à prévoir que la vitesse de ce point croîtra sans limite, et arrivera par conséquent à dépasser la vitesse de la lumière, ce qui est inadmissible.

Il faut donc modifier ces hypothèses de manière à les mettre en harmonie avec le principe [1].

La première hypothèse de la dynamique classique est qu'un point matériel qui n'est soumis à aucune force est animé, dans le cas le plus général, d'un mouvement uniforme. Nous pouvons conserver cette hypothèse. On a vu en effet qu'un mouvement uniforme pour A l'est aussi pour A_0 (n° 15, note). Par conséquent, A et A_0 estimeront dans le même cas qu'un

---

[1] Rappelons que nous nous bornons à étudier les phénomènes qui se passent sur une droite.

point matériel n'est soumis à aucune force, ce qui est bien conforme au principe de relativité.

Si un point matériel est animé d'un mouvement varié, A estimera que ce point est soumis à une force. En dynamique classique, cette force est par définition $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ étant l'accélération du point, *m étant un coefficient qui ne dépend que du point matériel et non de sa vitesse* (sa *masse*).

C'est ici que la nouvelle dynamique est obligée de se séparer de la dynamique classique, en adoptant une hypothèse plus générale. Étant donné un point matériel dont l'accélération à un certain instant est $\frac{d^2x}{dt^2}$, la force qui lui communique cette accélération aura toujours pour expression $m\frac{d^2x}{dt^2}$, mais on admettra que le coefficient m, au lieu d'être constant, *sera une certaine fonction de la vitesse du point à l'instant considéré.*

Autrement dit : la masse d'un point matériel, au lieu d'être constante, est une fonction de sa vitesse.

Avant de préciser la nature de cette fonction, on voit qu'elle doit être croissante avec la vitesse et tendre vers l'infini quand la vitesse du point matériel tend vers la vitesse de la lumière. C'est à cette condition que les lois de la nouvelle dynamique s'opposeront à ce que la vitesse d'un point matériel puisse atteindre celle de la lumière.

18. Nous déterminerons la forme de m par la condition suivante, d'accord avec le principe de relativité : *il faut que la valeur numérique attribuée à la force qui produit un mouvement donné soit la même pour l'observateur* A *et l'observateur* A_0, *et cela, quelle*

que soit la vitesse u d'entraînement du laboratoire Ox (*ou quel que soit l'argument hyperbolique* φ *de cette vitesse*).

On peut poser $m = f(\theta)$. Telle est la valeur de la masse du point M pour l'observateur A. Pour l'observateur A_0, cette masse a la valeur $f(\theta_0)$. On doit avoir

$$f(\theta)\,\frac{d^2x}{dt^2} = f(\theta_0)\,\frac{d^2x_0}{dt_0^2}.$$

Mais on a trouvé [équation (18)]

$$\text{ch}^3\theta\,\frac{d^2x}{dt^2} = \text{ch}^3\theta_0\,\frac{d^2x_0}{dt_0^2},$$

d'où

$$\frac{f(\theta)}{\text{ch}^3\theta} = \frac{f(\theta_0)}{\text{ch}^3\theta_0}.$$

Cette relation doit avoir lieu quels que soient θ et φ, c'est-à-dire quels que soient θ et $\theta_0 = \varphi + \theta$. Par conséquent, la valeur commune des deux membres de la relation précédente doit être une constante absolue m_0.

Ainsi

$$m = f(\theta) = m_0\,\text{ch}^3\theta; \tag{19}$$

m_0 est la masse du point pour une vitesse nulle, c'est-à-dire la *masse statique*.

Si l'on veut introduire explicitement la vitesse

$$\frac{dx}{dt} = \text{th}\,\theta,$$

on écrira

$$m = m_0\left(\frac{1}{1-\text{th}^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}} = m_0\left[1-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}.$$

Ainsi la masse d'un point matériel mobile est proportionnelle à la puissance d'exposant $-\frac{3}{2}$ de l'expres-

sion $1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$. On voit bien qu'elle devient infinie pour $\frac{dx}{dt} = 1$.

On donne à m le nom de *masse longitudinale*, la dynamique d'un milieu à deux ou trois dimensions obligeant à considérer une autre masse, la *masse transversale*, dont la valeur est différente.

En résumé, l'équation fondamentale de la dynamique sur une droite Ox est la suivante :

$$(20) \qquad m_0 \operatorname{ch}^3\theta \frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{F}.$$

Mais, comme on l'a déjà écrit,

$$(11) \qquad \frac{dx}{dt} = \operatorname{th}\theta, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\theta}\frac{d\theta}{dt}.$$

On peut donc écrire l'équation (20)

$$(21) \qquad m_0 \operatorname{ch}\theta \frac{d\theta}{dt} = \mathrm{F}.$$

19. Comme application, traitons le mouvement d'un point matériel soumis à une force d'intensité constante. Il faut intégrer les équations (21) et (11), où F est une constante. Nous supposerons que le point mobile part du point O au temps zéro avec une vitesse nulle.

L'équation (21) s'écrit

$$m_0 \operatorname{ch}\theta \, d\theta = \mathrm{F}\, dt.$$

Intégrons en tenant compte des conditions à l'origine. Il vient

$$m_0 \operatorname{sh}\theta = \mathrm{F}\, t,$$

d'où

$$\mathrm{sh}\,\theta = \frac{F}{m_0}\,t, \qquad \mathrm{th}\,\theta = \frac{\frac{F}{m_0}\,t}{\sqrt{1+\frac{F^2}{m_0^2}\,t^2}}.$$

L'équation (11) donne alors

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{F}{m_0}\,t}{\sqrt{1+\frac{F^2}{m_0^2}\,t^2}},$$

d'où

$$x = \int_0^t \frac{\frac{F}{m_0}\,t\,dt}{\sqrt{1+\frac{F^2}{m_0^2}\,t^2}} = \frac{m_0}{F}\left(\sqrt{1+\frac{F^2}{m_0^2}\,t^2} - 1\right).$$

Telle est l'équation du mouvement. Quand t augmente indéfiniment, x augmente indéfiniment et $\frac{dx}{dt}$ tend vers 1.

CORRESPONDANCE.

M. G. Fouret. — *Au sujet de la question* 1015 [1]. — Le second paragraphe de l'énoncé de la question 1015 est erroné (sauf pour une certaine catégorie de surfaces gauches sur laquelle je pense revenir bientôt). J'ai dû vous signaler ce fait il y a quelques années, au

---

[1] Extrait d'une lettre adressée à M. C.-A. Laisant. M. Fouret envoie en même temps une solution de la première partie de la question 1015. Nous espérons pouvoir la publier dans l'un de nos prochains numéros.

moment où vous avez publié vos excellents Recueils de Problèmes; car à la page 86 de celui qui concerne la Géométrie analytique à trois dimensions, la première partie de la question **1015** se trouve seule reproduite. Avais-je eu soin, antérieurement ou en même temps, d'aviser de mon erreur la Rédaction des *Nouvelles Annales?* Je n'en ai aucun souvenir; s'il y a eu oubli de ma part, je ne puis que le regretter, et je vous prie de m'en excuser auprès des lecteurs de votre journal.

M. **H. Vogt**. — *Sur le mouvement de la manivelle et de la tige guidée.* — Dans le numéro d'avril dernier des *Nouvelles Annales* (p. 121 de ce Volume), M. d'Ocagne établit simplement l'équation dont dépend l'inclinaison de la bielle lorsque la vitesse de son extrémité opposée à la manivelle passe par un maximum ou, ce qui revient au même, lorsque l'accélération de cette extrémité est nulle.

Je me permets de mentionner quelques remarques que j'ai introduites dans mon enseignement, facilitant la détermination de cette accélération pour une position quelconque de la manivelle ; les résultats auxquels j'aboutis ne diffèrent pas de ceux qui sont établis par M. d'Ocagne et d'autres auteurs, mais la manière de les obtenir, qui n'est peut-être pas nouvelle, pourra intéresser les lecteurs des *Nouvelles Annales*. Je me reporterai à la figure 1 de l'article de M. d'Ocagne, et je la supposerai complétée par le tracé de HI et OK.

Il s'agit de trouver la vitesse du point H qui se déplace sur Oy; le mouvement de ce point peut être considéré comme résultant de deux autres : l'un est le mouvement d'entraînement du point coïncidant H_1 lié à la bielle, l'autre est le mouvement relatif du point H le long de la bielle elle-même; la vitesse d'en-

traînement v_e est normale à HI, la vitesse relative v_r dirigée suivant AB, et la vitesse absolue cherchée v_a suivant Oy; il suffit de connaître la première pour avoir les deux autres.

Or on sait que l'on a la vitesse v_e du point H_1 de la bielle en menant par O une parallèle à IH_1 jusqu'à son point de rencontre H' avec AB; la vitesse v_e est égale a $\omega.OH'$ et est normale à OH'. Mais le point H' se confond précisément avec le point désigné par K; cela résulte de l'homothétie par rapport à A des deux figures HJKO et BOHI, entraînant le parallélisme de OK et de HI. On aperçoit ainsi la signification cincinatique du point K, donnant lieu à la relation $v_e = \omega.OK$.

Pour en déduire v_r et v_a, il suffit de construire un triangle dont les côtés sont respectivement dirigés suivant la perpendiculaire à OK, la droite AB et l'axe Oy. Ce triangle est semblable à OKL comme ayant les côtés perpendiculaires à ceux de ce dernier; il lui serait du reste parallèle après la rotation des vitesses d'un angle droit, comme on le fait dans certaines théories. On a donc $v_r = \omega.OL$ et $v_a - \omega.KL$; l'accélération du point B est par suite égale à $\omega^2.KL$.

Ce résultat est conforme à celui qui est indiqué par M. d'Ocagne, et à celui qui résulte des considérations de M. Massau, développées dans le *Cours de Mécanique appliquée* de M. Boulvin (t. V, p. 49). M. Massau construit le point K d'après l'équation $AK.AB = AH^2$, puis trace par le point K une perpendiculaire à AB jusqu'à son point de rencontre K' avec OB, et trouve que l'accélération de B est égale à $\omega^2.B'O$; ce sont bien les mêmes résultats que les précédents, car le point K est celui de la figure de M. d'Ocagne, et K'O est égal et parallèle à KL. L'accélération du point B sera nulle quand K' se confondra avec O.

Ces résultats sont obtenus d'une manière à peu près identique par M. Moutard (*Cours de machines à vapeur de l'École du génie maritime*).

BIBLIOGRAPHIE.

G. Darboux. — *Principes de Géométrie analytique;* volume in-8 (25-16) de VI-520 pages, avec 27 figures; 1917. Librairie Gauthier-Villars. Prix : 20fr.

Nous ne croyons pouvoir mieux donner une idée de cet important Ouvrage qu'en reproduisant la Préface du grand géomètre que vient de perdre la Science.

Le nouveau Volume que je soumets aujourd'hui au jugement du public mathématique est le résumé de leçons que j'ai faites depuis 1872, soit à l'École Normale supérieure, soit à la Faculté des Sciences de Paris. Avant d'être enseignées en public, les matières qui le composent ont été exposées en grande partie, avec d'autres encore, devant mes chers élèves de l'École Normale de 1872 à 1876. Les théories générales qui forment la substance des quatre premiers Livres ont été l'objet de mon Enseignement à la Sorbonne, dès l'année scolaire 1879-1880. C'est en 1895-1896 que j'ai développé les principes de la *Géométrie Cayleyenne*. Enfin, les propriétés essentielles des *cyclides* ont fait, depuis l'année 1880-1881, partie intégrante de tous mes cours sur les *systèmes triples orthogonaux*.

Il ne faut pas regarder le présent Ouvrage comme un

exposé didactique et systématique des principes et des méthodes de la belle création de *Descartes*. Il suppose une connaissance préalable des éléments de la *Géométrie analytique*. Son but essentiel est de préciser les notions relatives à l'imaginaire, à l'infini, etc., et de montrer qu'en Géométrie elles doivent prendre toute la place et toute l'importance qui leur ont été attribuées, depuis longtemps, en Analyse. Dans l'exposé de ces notions, je me suis attaché à rester aussi élémentaire que possible, et me suis interdit, à regret quelquefois, tout développement qui ne serait pas de nature à être compris par un bon élève de mathématiques spéciales.

Je dois, en terminant, remercier mes collègues MM. Cl. Guichard et Ernest Lebon du concours qu'ils ont bien voulu me prêter pour la correction des épreuves; je me reprocherais d'oublier mon excellent éditeur M. Gauthier-Villars. Malgré toutes les difficultés nées d'une guerre où la France combat pour la liberté et le salut du monde, il n'a pas craint de me faire confiance, d'accueillir et de mener à bien cette publication avec tout le soin auquel il nous a habitués.

Titres des Chapitres.

Livre I. — *Le rapport anharmonique.* — Introduction. Les coordonnées tétraédriques. Le rapport anharmonique. La méthode des notations abrégées de Bobillier et l'homologie dans le plan. L'homologie biaxiale. Le principe de dualité. Les figures corrélatives. Les coniques et les divisions homographiques.

Livre II. — *Définitions métriques.* — Les relations métriques dans le plan. Étude d'une classe particulière de courbes analogues aux coniques. Les éléments métriques dans l'espace. Génératrices rectilignes de la sphère. Trigonométrie sphérique. Segments associés sur la sphère.

LIVRE III. — *Les théorèmes de Poncelet.* — Étude d'un système particulier de coordonnées. Les théorèmes de Poncelet. Le théorème général de Poncelet.

LIVRE IV. — *La Géométrie Cayleyenne.* — Origine de la Géométrie Cayleyenne. Les déplacements Cayleyens. La trigonométrie Cayleyenne.

LIVRE V. — *De l'inversion.* — L'inversion. Ses propriétés essentielles. Les coordonnées pentasphériques. Les cyclides en coordonnées cartésiennes. Les cyclides en coordonnées pentasphériques. Les cyclides et leurs sphères principales. Le système triple orthogonal formé de trois familles de cyclides. Un mode de transformation de l'espace qui se présente dans l'étude des cyclides.

ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES.

1035 (**1871**, 336). — Il y a les mêmes relations entre les tangentes menées d'un point de l'ellipsoïde à trois sphères doublement tangentes à l'ellipsoïde, qu'entre les distances d'un point variable dans un plan à trois points de ce plan.

G. DARBOUX.

1042 (**1871**, 479). — On donne quatre surfaces fixes du second ordre passant par une même courbe gauche du quatrième ordre, ayant un point double de rebroussement :

1° Un point M se meut sur l'une d'elles; trouver le lieu du point de rencontre du plan polaire du point M par rapport à chacune des trois autres surfaces.

2° Un plan P touche l'une d'elles; trouver l'enveloppe du plan passant par les pôles du plan P relatifs à chacune des trois autres surfaces.

L. PAINVIN.

1063 (**1872**, 96). — $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ désignent deux fonctions entières de x et de y; $y_1, y_2, \ldots$ sont les racines

de l'équation en y, $f(x, y) = 0$, et x_1, x_2, ... les racines de la même équation, dans laquelle x est seule traitée comme inconnue; enfin (α_1, β_1), (α_2, β_2), ... représentent les solutions du système d'équations

$$f(x, y) = 0, \qquad \varphi(x, y) = 0.$$

Démontrer la relation

$$\sum \frac{1}{(x-\alpha_i)(y-\beta_i)} = \sum_j \frac{1}{y-y_j} \frac{\frac{d\varphi(x, y_j)}{dx}}{\varphi(x, y_j)} + \sum_k \frac{1}{x-x_k} \frac{\frac{d\varphi(x_k, y)}{dy}}{\varphi(x_k, y)}.$$

F. Didon.

1074 (**1872**, 190). — Étant donné un polygone plan et convexe dont deux côtés consécutifs quelconques font un angle constant, on sait que le lieu du point tel qu'en projetant ce point sur les côtés du polygone et joignant les projections consécutives par des droites, on forme un polygone d'une aire donnée, est une circonférence. Quand la valeur de l'aire varie, on obtient diverses circonférences qui ont toutes même centre O. Démontrer que ce point O est le centre des moyennes distances des sommets du polygone primitif, ou, plus généralement, des points qu'on obtient en prenant les centres de deux côtés séparés par un même nombre k de côtés; ce point O est aussi le centre des moyennes distances de ses projections sur les côtés du polygone. Voir ce que deviennent ces théorèmes quand ces côtés deviennent infiniment petits, et que le polygone se transforme en une courbe plane et convexe. On retrouvera en particulier une proposition bien connue, de Steiner, relative au centre de gravité de masses appliquées aux différents arcs infiniment petits égaux de la courbe, et inversement proportionnelles aux rayons de courbure correspondants. F. Didon.

1105 (**1872**, 527). — 1° Trouver l'équation des courbes qui coupent sous un angle constant tous les segments décrits sur une même corde.

2° Même problème pour les hyperboles équilatères concentriques qui passent par un point fixe.

3° Même problème pour les ellipses homofocales.

4° Même problème pour les cassiniennes homofocales, c'est-à-dire les courbes telles que le produit des distances de chaque point aux n sommets d'un polygone régulier reste constant.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

1107 (**1872**, 528). — Le nombre des coniques d'un système (μ_1, ν_1) qui sont osculatrices à des coniques d'un autre système (μ_2, ν_2) est égal à $3(\mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2)$.

H.-G. ZEUTHEN.

1108 (**1872**, 528). — Combien de coniques d'un système ont un double contact avec des coniques d'un autre système ?

H.-G. ZEUTHEN.

1149 (**1874**, 399). — Trois points l, m, n étant pris sur une conique, on construit par rapport à un point quelconque f les cercles adjoints aux trois systèmes de droites lm, ln, ml, mn, nl, nm (¹), ainsi que le cercle orthogonal à ces trois cercles. Si l'on désigne par α, β les demi-axes principaux de la conique, par g le pied de la perpendiculaire abaissée du point f sur sa polaire,

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{I_f}{fg^2}\left(1 - \frac{\pi_g}{\pi_f}\right),$$

π_g, π_f étant les puissances des points g, f par rapport au cercle orthogonal, I_f l'indice du point f par rapport à la conique.

Examen des cas où le point f coïncide avec le centre de la conique.

H. FAURE.

1206 (**1876**, 192). — Soient

$$(1)\quad \begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 w = 0 & \text{ou} \quad A = 0, \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 w = 0 & \text{ou} \quad B = 0, \\ c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 w = 0 & \text{ou} \quad C = 0 \end{cases}$$

les équations de trois plans.

(¹) Pour la définition du cercle adjoint, *voir* 1872, p. 444.

Si les coefficients a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, ... sont des fonctions d'un paramètre variable t, le point d'intersection de ces trois plans décrira une courbe.

Démontrer que le plan osculateur à cette courbe au point

$$\mathrm{A} = 0, \qquad \mathrm{B} = 0, \qquad \mathrm{C} = 0,$$

a pour équation

$$\begin{vmatrix}
\mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a''_1 & b''_1 & c''_1 & 2a'_1 & 2b'_1 & 2c'_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\
a''_2 & b''_2 & c''_2 & 2a'_2 & 2b'_2 & 2c'_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\
a''_3 & b''_3 & c''_3 & 2a'_3 & 2b'_3 & 2c'_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\
a''_4 & b''_4 & c''_4 & 2a'_4 & 2b'_4 & 2c'_4 & a_4 & b_4 & c_4 \\
2a'_1 & 2b'_1 & 2c'_1 & a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\
2a'_2 & 2b'_2 & 2c'_2 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\
2a'_3 & 2b'_3 & 2c'_3 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\
2a'_4 & 2b'_4 & 2c'_4 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix} = 0;$$

A, B, C sont définis par les équations (1); a'_1, b'_1, c'_1, ...; a''_1, b''_1, c''_1, ... sont les dérivées premières et les dérivées secondes des coefficients a_1, b_1, c_1, ... par rapport à t.

GENTY.

1236 (**1877**, 286). — On donne un tétraèdre ABCD et deux points E, F; on construit deux autres tétraèdres EABC, FABC. Les faces de FABC coupent les arêtes de EABC aux points G, H, I. On détermine sur ces mêmes arêtes trois autres points K, L, M tels qu'on ait

$$\frac{\mathrm{EG}}{\mathrm{EK}} : \frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{AK}} = \frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{EL}} : \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BL}} = \frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{EM}} : \frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}.$$

Prouver :

1° Que les quatre plans analogues à KLM passent par un même point;

2° Que ce point décrit un plan tangent au cône passant par les cinq droites EA, EB, ..., le long de la génératrice EF, lorsque les cinq points A, B, C, D, F décrivent arbitrairement ces mêmes droites.

BOURGUET.

1256 (**1878**, 237). — La lettre l désignant un logarithme népérien, démontrer les inégalités

$$\frac{ln\,l(n+1)}{2} > \frac{l2}{2} + \frac{l3}{3} + \ldots + \frac{ln}{n} > \frac{ln\,l(n+1)}{2} - \frac{1}{12},$$

$$\frac{39}{51} - \frac{l(n+1)}{n} > \frac{l2}{2} + \frac{l3}{2.3} + \ldots + \frac{ln}{(n-1)n} > \frac{5}{4} - \frac{l(n+1)+1}{n}.$$

C. Moreau.

1305 (**1878**, 527). — On donne un faisceau F_n de courbes de l'ordre n et une droite d; chaque point D de d détermine une courbe de F_n. Démontrer que l'enveloppe de la tangente en D à la courbe déterminée par ce point est de la classe $2n-1$, de l'ordre $4(n-1)$; que la droite d est une tangente multiple de l'ordre $2(n-1)$; que la courbe a $4(n-2)(n-3)$ points doubles, $3(2n-3)$ points de rebroussement, qu'elle n'a aucun point d'inflexion; que les tangentes en $(n-1)$ points de rebroussement passent par les $(n-1)$ points qui correspondent à l'infini dans l'involution que les courbes du faisceau F_n marquent sur la droite d.

Examiner le cas où k points de la base de F_n se trouvent sur la droite d.

Construire la courbe dans le cas où $n=2$, en supposant : 1° que les quatre points de la base du faisceau des coniques se trouvent d'un même côté de la droite d; 2° que trois de ces points se trouvent d'un côté de d, et le quatrième de l'autre côté.

E. Dewulf.

1321 (**1879**, 383). — Étant donné un ellipsoïde, on décrit la sphère qui passe par les extrémités A, B, C de trois rayons conjugués et qui a son centre dans le plan ABC; trouver : 1° le lieu du centre de la sphère; 2° l'enveloppe de cette sphère.

Barbarin.

1361 (**1881**, 144). — Faire voir que l'étude des variations de la fonction $\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ peut toujours être ramenée à l'étude des variations de la fonction $\dfrac{Ax^2+Bx+C}{x^2+px+q}$, dans laquelle les racines α, β de $x^2+px+q=0$ sont *réelles et*

inégales; que si $R(x)$ est le reste de la division de

$$Ax^2 + Bx + C$$

par $x^2 + px + q$, il y aura un maximum et un minimum si $\frac{R(\alpha)}{R(\beta)} > 0$, il n'y aura ni maximum ni minimum si $\frac{R(\alpha)}{R(\beta)} < 0$, il n'y aura qu'un maximum (pour la fonction transformée) si $R(x)$ est constant.

Trouver, en fonction de α, β, $R(\alpha)$, $R(\beta)$, les valeurs de x qui font passer la fonction proposée par un maximum ou un minimum.

Dans le cas où α et β se présenteraient sous la forme $\frac{a \pm \sqrt{b}}{c}$, peut-on simplifier les calculs ? HÉNET.

1365 (**1881**, 381). — Démontrer que l'équation

$$x^{n-l} - \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)} a^2 x^{n-l-2} + \frac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} a^4 x^{n-l-4} - \ldots = 0$$

a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre $-a$ et $+a$. ESCARY.

1366 (**1881**, 381). — Démontrer que l'équation

$$x^{n-l} + \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)} a^2 x^{n-l-2} + \frac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} a^4 x^{n-l-4} + \ldots = 0$$

a toutes ses racines imaginaires, inégales et comprises dans l'intérieur d'un cercle de rayon égal à a. ESCARY.

1471 (**1883**, 432). — On donne, dans un hexagone circonscriptible à un cercle, les longueurs des trois diagonales qui unissent les sommets opposés; construire cet hexagone, sachant que ces trois diagonales sont respectivement parallèles à trois côtés de l'hexagone, deux quelconques de ces côtés n'étant pas consécutifs. E. LEMOINE.

1483 (**1883**, 528). — Soient V le volume d'un tétraèdre et V_1 le volume du tétraèdre qu'on obtient en menant par un point quelconque des droites égales et parallèles aux plus courtes distances α, β, γ des arêtes opposées du tétraèdre donné; on a

$$12\,VV_1 = \alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

Genty.

1490 (**1884**, 351), — Vérifier l'identité

$$(2a)^{n-1} - C_{n-2,1}(2a)^{n-3} + C_{n-3,2}(2a)^{n-5} - \ldots$$
$$= C_{n,1}a^{n-1} + C_{n,3}a^{n-3}(a^2-1) + C_{n,5}a^{n-5}(a^2-1)^2 + \ldots.$$

E. Catalan.

1502 (**1884**, 400). — On donne dans l'espace deux droites A et B. Une hyperbole H doit avoir la droite A pour directrice et être un méridien d'une surface gauche de révolution contenant la droite B. On demande le lieu du foyer de H, correspondant à la directrice A. Halphen.

1508 (**1884**, 448). — On sait que les cordes d'une conique qui sont vues d'un point C de la courbe sous un angle droit passent par un point fixe P; la polaire de ce point, par rapport à la conique, est une corde commune de cette courbe et du point C considéré comme un cercle infiniment petit.

Cela posé, soient A et B deux points quelconques de cette polaire. Par les trois points A, B et C on peut mener trois coniques ayant un contact du second ordre avec la conique donnée aux points L, M et N respectivement; les droites CL, CM et CN sont normales aux côtés d'un triangle équilatéral, et il en est de même des droites qui joignent le point C aux quatrièmes points de rencontre des trois coniques osculatrices deux à deux. Genty.

1510 (**1884**, 495). — La conique inscrite au triangle ABC touche les côtés BC, CA, AB aux points A', B', C'. Les milieux a, b, c des côtés BC, CA, AB ont des polaires à la conique inscrite; ces polaires forment un autre triangle dont l'aire est égale à l'aire du triangle ABC. H. Schröter.

1519 (**1884**, 544). — On donne n tiges dont les longueurs

sont représentées par $l_1, l_2, \ldots, l_i, \ldots, l_n$. Chacune de ces tiges est peinte en rouge à l'une de ses extrémités, en noir à l'autre. On casse, au hasard, un morceau de chacune de ces tiges. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ les longueurs des bouts qui portent la marque noire; quelle est la probabilité d'avoir

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \mathrm{S},$$

S étant plus petit que $l_1 + l_2 + \ldots + l_n$?

Ed. Dewulf.

1527 (**1885**, 150). — Soient A, B, C, ... des nombres dont le premier chiffre à gauche n'est jamais zéro; a, b, c, ... ces nombres lus de droite à gauche.

J'appelle *nombre symétrique* un nombre tel que deux chiffres à égale distance des extrêmes soient égaux.

Exemples : 1221, 12421.

J'appelle *pseudo-symétrique d'échelle* p un nombre tel que la somme de deux chiffres, à égale distance des extrêmes, soit p ou zéro; s'il y a un nombre impair de chiffres dans ce nombre et que p soit impair, le chiffre du milieu doit toujours être zéro; si p est pair, le chiffre du milieu peut être, soit zéro, soit $\frac{p}{2}$.

Exemples : 603502, 6030502, 6034502 sont pseudo-symétriques d'échelle 8.

Cela posé :

1° Si A a n chiffres, trouver combien de valeurs différentes peut prendre la somme $\mathrm{A} + a$ quand A varie de x^{n-1} à x^n, x étant la base du système de numération;

2° Si l'on a $\mathrm{A} + a = \mathrm{B} + b$, A ayant n chiffres, B en ayant $n + 1$ et étant tel que la somme de deux chiffres à égale distance des extrêmes soit plus petite que x, le nombre $\mathrm{A} + a = \mathrm{B} + b$ sera symétrique, et A sera pseudo-symétrique d'échelle $x + 1$.

Exemple : On a ($x = 10$),

$$\begin{array}{rcccc} \mathrm{N} & = & \mathrm{A} & + & a \\ 12111011121 & = & 8607004053 & + & 3504007068 \\ & = & \mathrm{B} & + & b \\ & = & 10011000120 & + & 02100011001 \end{array}$$

E. Lemoine.

1528 (**1885**, 151). — Soient PA, PB, PC les trois normales menées d'un point P à une parabole donnée; on considère les centres O, O', O'', O''' des quatre cercles tangents aux côtés du triangle ABC.

1° Si le point P est sur la directrice, il coïncide avec l'un des points O, O', O'', O'''. Les trois autres sont sur la parabole, lieu du sommet des angles droits normaux à la parabole donnée.

2° Par les points O, O', O'', O''' on peut faire passer trois hyperboles équilatères, telles que les normales à chacune d'elles en ces quatre points soient concourantes. Les trois points de concours Q_1, Q_2, Q_3 sont sur un cercle concentrique au cercle circonscrit au triangle ABC et de rayon triple, et sur les rayons de ce cercle qui passent par les centres des hyperboles correspondantes. Pour quelles positions du point P les trois hyperboles sont-elles réelles? L'une de ces hyperboles a son centre sur l'axe de la parabole. Si le point Q correspondant est sur cette parabole, l'hyperbole correspondante passe par le point P.

3° En général, quel est le lieu du point P tel que l'une des hyperboles précédentes passe par ce point? Quel est le lieu du point de concours Q, du centre de l'hyperbole, des points O, O', O'', O'''?

4° Quel est le lieu des points Q_1, Q_2, Q_3, si le point P décrit une droite donnée? J. Hadamard.

1530 (**1885**, 248). — Soit $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ un heptagone inscrit: d'un sommet on peut mener deux diagonales qui partagent l'heptagone en un quadrilatère et un pentagone; on a ainsi sept diagonales. Les intersections de chaque côté avec les trois diagonales qui ne passent pas par ses extrémités sont sur une quintique. A. La Chesnais.

1564 (**1887**, 399). — Étudier le complexe des droites D dont les distances à deux droites données L et L' ont un rapport constant K. Examiner en particulier le cas où les droites L et L' se coupent à angle droit, et celui où ces droites sont parallèles. Schoute.

1571 **1887**, 582). — C_m^p désignant le nombre des combi-

naisons de m lettres p à p, démontrer la formule

$$2^{2n} = C_{2n}^{n} + 2C_{2n-1}^{n-1} + \ldots + 2^k C_{2n-k}^{n-k} + \ldots + 2^n.$$

PELLERIN.

1596 (**1891**, 1*). — Étant donnés, dans un plan, une courbe générale de $n^{\text{ième}}$ classe et un point, il existe $2n(n+1)$ paraboles, ayant un même paramètre, qui ont pour foyer le point donné et sont tangentes à la courbe donnée.

La somme des angles que font, avec une direction quelconque Δ du plan, les axes de ces paraboles, est égale, à un multiple de π près, au quadruple de la somme des angles que font avec la direction Δ les droites joignant le foyer commun des paraboles aux n foyers de la courbe, augmenté du double de la somme des angles que font avec Δ les $n(n+1)$ directions asymptotiques de cette courbe. G. FOURET.

1599 (**1891**, 2*). — Si l'on pose

$$E_1 = \frac{4}{3}\pi(ab + bc + ca),$$

$$R = \frac{2\pi}{15b}[a^2(b-c)^2 + b^2(c-a)^2 + c^2(a-b)^2];$$

et si l'on désigne par E l'aire de l'ellipsoïde dont les demi-axes rangés par ordre de grandeur décroissante sont a, b, c, on a

$$E = E_1 + \frac{R}{c - \theta(a-c)},$$

θ étant un nombre convenablement choisi entre 0 et 1.

G. PEANO.

1600 (**1891**, 2*). — Soient X'X une droite horizontale indéfinie, A et B deux points pris sur cette droite et C un point pris au-dessous de manière que sa projection sur X'X tombe entre A et B; n points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ dont les masses respectives sont $m_1, m_2, \ldots, m_n$ parcourent la ligne brisée X'ACBX, de telle sorte que leur ordre de succession reste le même et que les projections sur X'X de leurs distances mutuelles restent constantes. On demande de trouver : 1° le

lieu du centre de gravité de ce système de points; 2° la position du système pour laquelle le centre de gravité est le plus bas. E. ROUCHÉ.

1609 (**1891**, 24*). — Étudier les courbes enveloppées par les droites

$$x \cos\lambda + y \sin\lambda + P_n = 0.$$

P_n est un polynome de degré n en λ, et λ un paramètre variable. Montrer qu'on peut disposer des constantes du polynome P_n de manière que pour n pair les courbes n'aient aucun point de rebroussement et que pour n impair elles en aient un. Que peut-on dire des points de rebroussement lorsque les constantes demeurent quelconques?

LUCIEN LÉVY.

1614 (**1891**, 25*). — Dans l'espace, deux figures corrélatives peuvent toujours être placées de manière à être polaires réciproques par rapport à une quadrique réelle. G. TARRY.

1647 (**1892**, 32*). — Une solution en nombres entiers de l'équation

$$x + y + z = n$$

est prise au hasard, aucune racine n'étant zéro; chercher la probabilité que le produit des valeurs de x, y, z soit multiple de $\frac{n}{k}$, k étant un diviseur de l'entier n.

1650 (**1893**, 1*). — Soient S une surface telle que les lignes de courbure d'un système soient circulaires, (γ) l'un de ces cercles et G le sommet du cône circonscrit à S le long de (γ). Démontrer que la trajectoire du point G est normale au plan déterminé par ce point et par la caractéristique du plan du cercle (γ). CARONNET.

1660 (**1894**, 1*). — Les deux tangentes au point double d'une cubique étant réelles, si d'un point de la courbe A_1 on peut mener deux tangentes réelles, il n'y a qu'un des points de contact, A_2 par exemple, d'où l'on puisse mener de nouveau

des tangentes réelles; alors de A_2 on mène la tangente dont le point de contact A_3 jouit de la même propriété, etc.; montrer que le point limite vers lequel on tend ainsi est le point d'inflexion réel de la courbe. A. Astor.

1672 (**1894**, 4*). — La podaire du centre de la courbe

$$4(x^2+y^2-a^2)^3+27a^2x^4=0$$

a pour équation

$$4(x^2+y^3)^3-a^2(2x^2+y^3)^2=0.$$

La rapport de l'aire de la première courbe à celle de la seconde est $\frac{15}{19}$. E.-N. Barisien.

1686 (**1895**, 33*). — Résoudre les $2n-1$ équations à $2n-1$ inconnues

$$\frac{1}{2}=X_1x_1+\ldots+X_{n-1}x_{n-1}+X_n,$$

$$\frac{1}{3}=X_1x_1^2+\ldots+X_{n-1}x_{n-1}^2+X_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{2n}=X_1x_1^{2n-1}+\ldots+X_{n-1}x_{n-1}^{2n-1}+X_n,$$

et montrer que les inconnues $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont les racines, autres que zéro et un, de l'équation

$$\frac{\partial^{n-1}\lambda^n(\lambda-1)^n}{\partial\lambda^{n-1}}=0.$$

Lucien Lévy.

1687 (**1895**, 33*). — On sait que l'équation

$$\frac{\partial^n x^n(x-1)^n}{\partial x^n}=0$$

peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdot & \cdots & \frac{1}{2n} \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix} = 0;$$

démontrer que l'équation

$$\frac{\partial^{n+1} x^n (x-1)^n}{\partial x^{n+1}}$$

peut de même s'écrire

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2.3} & \frac{1}{3.4} & \cdots & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ \frac{1}{3.4} & \frac{1}{4.5} & \cdots & \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} & \cdots & \frac{1}{(2n-1)2n} \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

De même l'équation

$$\frac{\partial^{2n-k} x^n (x-1)^n}{\partial x^{2n-k}} = 0$$

peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{(n-k+1)(n-k+2)\ldots(2n-2k+1)} & \cdots & \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(2n-k+1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{n(n+1)\ldots(2n-k)} & \cdots & \frac{1}{(n+k)(n+k+1)\ldots 2n} \\ 1 & \cdots & x^k \end{vmatrix} = 0.$$

LUCIEN LÉVY.

1688 (**1895**, 34*) [1]. — Étant données les équations simultanées

$$(A)\quad \begin{cases} x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = 0, \\ x\cos\lambda' + y\cos\mu' + z\cos\nu' = 0; \end{cases}$$

$$(B)\quad \begin{cases} u\cos\lambda + u'\cos\lambda' = 0, \\ u\cos\mu + u'\cos\mu' = 0, \\ u\cos\nu + u'\cos\nu' = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé $u = m\dfrac{d\sigma}{dt}$, $u' = m'\dfrac{d\sigma'}{dt}$; $d\sigma$ et $d\sigma'$ sont les aires des parallélogrammes construits sur r et ds, r' et ds'; ds et ds' sont les différentielles des arcs des trajectoires décrites dans l'espace par les corps m et m' dans le temps dt; enfin λ, μ, ν, λ', μ', ν' sont les angles des normales aux plans de ces parallélogrammes. On demande de déduire de ces équations les propositions suivantes rencontrées successivement par Laplace [2] et par Jacobi [3] :

1° L'intersection de deux plans (A) est constamment située dans le plan des xy qu'elle décrit;

2° Ce dernier plan est toujours compris entre les deux plans (A).

ESCARY.

NOTE.

A cause de la connexité qui vient d'être signalée, les énoncés des questions 1689 et suivantes seront publiés en tête du prochain numéro (pages 241 et suivantes).

---

[1] Les huit énoncés 1688 à 1695 doivent être considérés comme formant une seule question. Il est regrettable qu'elle ait pris place, sous cette forme, dans les *Nouvelles Annales*.

LA RÉDACTION.

[2] *Mécanique céleste*, livre II, n° 62.

[3] *Comptes rendus*, t. XV, p. 236.

ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES.

1689 (**1895**, 35*). — Conclure des mêmes équations (celles de la question 1688) les résultats suivants :

1°
$$dt = \frac{m\,d\sigma \sin(\nu + \nu')}{a \sin \nu'} = \frac{m'\,d\sigma' \sin(\nu + \nu')}{a \sin \nu};$$

2°
$$a^2 = u^2 + u'^2 + 2uu' \cos(\nu + \nu');$$

3° Le plan des deux normales menées par l'origine aux plans (A) contient l'axe des z;

4° L'équation
$$m\,d\sigma \sin \nu = m'\,d\sigma' \sin \nu',$$

où $m\,d\sigma$ et $m'\,d\sigma'$ sont des moments, exprime que le plan des xy est un lieu géométrique d'axes instantanés de rotation et que, par suite, ce plan est un cône de Poinsot, lequel est de révolution et a pour cône supplémentaire l'axe des z.

ESCARY.

1690 (**1895**, 35*). — En désignant par ψ la longitude du plan des deux normales (λ, μ, ν), (λ', μ', ν') qui pivote autour de l'axe des z, démontrer qu'on a

$$\frac{\cos\lambda}{\cos\mu} = \frac{\cos\psi}{\sin\psi}, \qquad \frac{\cos\lambda'}{\cos\mu'} = \frac{\cos\psi'}{\sin\psi'}, \qquad \frac{\cos\lambda}{\cos\mu} = \frac{\cos\lambda'}{\cos\mu'}.$$

ESCARY.

1691 (**1895**, 35*). — Conclure de ces équations $\psi' = \psi + \pi$ (Laplace) et les deux intégrales suivantes

$$\operatorname{tang}^2\theta \cos 2\psi = D^2, \qquad \operatorname{tang}^2\theta' \cos 2\psi' = D'^2,$$

où θ et θ' sont des angles que font les rayons vecteurs r et r' avec l'axe des z, D et D' des constantes arbitraires.

ESCARY.

1692 (**1895**, 35*). — En posant

$$\frac{\cos\psi}{\sqrt{\cos 2\psi}} = \sqrt{\frac{1+e^{2\omega}}{2}},$$

démontrer les formules suivantes :

$$\sin\theta = \cos\nu = \frac{D e^{\omega}}{\sqrt{D^2 e^{2\omega}+1}},$$

$$\cos\theta = \sin\nu = \frac{1}{\sqrt{D^2 e^{2\omega}+1}},$$

$$\cos\lambda = \frac{\sqrt{e^{2\omega}+1}}{\sqrt{2}\,e^{\omega}\sqrt{D^2 e^{2\omega}+1}},$$

$$\cos\mu = \frac{\sqrt{e^{2\omega}-1}}{\sqrt{2}\,e^{\omega}\sqrt{D^2 e^{2\omega}+1}},$$

$$d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2 = \frac{D^2 e^{4\omega}(e^{2\omega}+D^2)\,d\omega^2}{(D^2 e^{2\omega}+1)^2(e^{4\omega}-1)} = d\xi^2,$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\xi^2,$$

$$d\sigma^2 = r^4\, d\xi^2.$$

ESCARY.

1693 (**1895**, 36*). — Démontrer que la relation

$$\frac{\cos\lambda}{\cos\mu} = \frac{\cos\lambda'}{\cos\mu'},$$

déduite des deux premières équations (B), entraîne les suivantes :

$$\omega' = \omega,$$

$$dt = \frac{m}{a}\,\frac{(D+D')e^{\omega}}{\sqrt{D^2 e^{2\omega}+1}}\,r^2\, d\xi = \frac{m'}{a}\,\frac{(D+D')e^{\omega'}}{\sqrt{D'^2 e^{2\omega'}+1}}\,r'^2\, d\xi',$$

$$r'^2 = \frac{m}{m'}\,\frac{D}{D'}\,\frac{D'^2 e^{2\omega}+1}{D^2 e^{2\omega}+1}\,r^2,$$

$$r^2 = \frac{m'}{m}\,\frac{D'}{D}\,\frac{D^2 e^{2\omega'}+1}{D'^2 e^{2\omega'}+1}\,r'^2,$$

$$\cos(\nu+\nu') = \frac{DD' e^{2\omega}-1}{\sqrt{(D^2 e^{2\omega}+1)(D'^2 e^{2\omega'}+1)}}.$$

ESCARY.

1694 (**1895**, 36*). — Démontrer que, dans le cas de $D < D'$, on a l'inégalité

$$\frac{m'D'}{mD} > \frac{r^2}{r'^2} > \frac{m'D}{mD'};$$

et que, si l'on a

$$D > D',$$

la même inégalité a lieu dans un sens opposé. ESCARY.

1695 (**1895**, 37*). — Sachant qu'on a

$$r''^2 = r^2 + r'^2 + 2rr'\cos(\nu + \nu'),$$

et en posant

$$D^2 e^{2\omega} + 1 = P, \qquad D'^2 e^{2\omega} + 1 = Q,$$

$$DD'\left(\frac{\sqrt{mD'} + \sqrt{m'D}}{\sqrt{m'D} - \sqrt{mD'}}\right)^2 e^{2\omega} + 1 = S,$$

démontrer les relations suivantes ([1]) :

$$r''^2 - \left(\sqrt{\frac{mD}{m'D'}} - 1\right)^2 \frac{S}{P} r^2 = \left(\sqrt{\frac{m'D'}{mD}} - 1\right)^2 \frac{S'}{P'} r'^2,$$

$$d\xi^2 = \frac{D'^2}{D^2}\,\frac{P^2}{Q^2}\,\frac{e^{2\omega} + D'^2}{e^{2\omega} + D^2}\,d\xi^2,$$

$$d\xi^2 = \frac{D^2}{D'^2}\,\frac{P'}{Q'}\,\frac{e^{2\omega'} + D^2}{e^{2\omega'} + D'^2}\,d\xi'^2.$$

ESCARY.

1705 (**1895**, 39*). — Considérons un système focal donné comme l'ensemble de deux systèmes réciproques, et faisons tourner l'un de ces systèmes d'une demi-révolution autour d'une droite, assujettie à la seule condition de rencontrer à angle droit l'axe du système focal.

Démontrer que, dans cette nouvelle position, les deux systèmes sont polaires réciproques par rapport à un paraboloïde équilatère.

Si l'on désigne par c le paramètre des paraboles des sec-

([1]) Plusieurs de ces formules semblent entachées d'erreurs, peut-être typographiques. En outre, on n'a pas défini P', Q', S'. En tous cas, on a reproduit exactement ici le texte de l'énoncé imprimé en 1895.

tions principales de ce paraboloïde, par r la distance d'un point quelconque du système focal à l'axe et par θ l'angle que fait le plan focal de ce point avec l'axe, on a

$$r \operatorname{tang} \theta = c.$$

G. Tarry.

1710 (**1896**, 56). — Une série de bougies, de compositions et de hauteurs différentes, sont posées verticalement sur une table et allumées au même instant. Démontrer : 1° que généralement le centre de gravité du système formé par les bougies décrit une série d'arcs d'hyperboles successives ; 2° qu'à un instant quelconque l'hyperbole correspondante a une asymptote verticale qui passe par le centre de gravité primitif des parties consumées des bougies qui brûlent encore à l'instant considéré. Walton.

1715 (**1896**, 103). — On appelle *nombres de Möbius*, les nombres $\mu(n)$ définis de la manière suivante :

$$\mu(1) = 1.$$

$\mu(n) = 0$ quand n est divisible par un carré autre que l'unité.

$\mu(n) = +1$ quand n n'a que des facteurs premiers différents en nombre pair.

$\mu(n) = -1$ quand n n'a que des facteurs premiers différents en nombre impair.

Dans cet énoncé l'unité n'est pas comptée comme facteur.

Montrer que la somme

$$\mu^2(1) + \mu^2(2) + \ldots + \mu^2(n)$$

est égale à $\frac{6}{\pi^2} n + \delta$, expression où la valeur absolue de δ est inférieure à $3\sqrt{n}$.

J. Franel.

1721 (**1896**, 152). — Déterminer un polynome entier du degré n, $f'_n(x)$, tel que le résidu de la fonction

$$f'_n\left(\frac{1}{x}\right) \frac{x^{m-1}}{1 - x^m} \qquad (m \text{ nombre entier positif})$$

relatif au point $x = 0$ soit égal à o quand m et n sont différents, et à l'unité quand $m = n$. J. Franel.

1731 (**1896**, 295). — Soient n et $k \leqq n$ deux nombres entiers positifs, et posons, en désignant par $E\left(\frac{n}{k}\right)$ le plus grand nombre qui ne surpasse pas $\frac{n}{k}$,

$$\frac{n}{k} = E\left(\frac{n}{k}\right) + \theta k,$$

en sorte que

$$0 \leqq \theta_k < 1.$$

Démontrer que l'expression

$$\sqrt[n]{(1-\theta_1)(1-\theta_2)(1-\theta_3)\dots(1-\theta_n)}$$

converge vers une limite déterminée pour $n = \infty$, limite qu'on peut exprimer par le produit infini

$$\prod_2^\infty \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

et dont la valeur numérique est

$$0,4545101352\dots$$

1738 (**1896**, 344). — Huit points étant donnés sur un plan, il existe 75 points tels qu'en les joignant aux huit points donnés, on obtienne des faisceaux en involution.

Ed. Dewulf.

1747 (**1896**, 487). — On pose, a, b, a_0 étant trois quantités réelles,

$$a_n + b_n i = \frac{(a+bi+2)(a+bi+4)\dots(a+bi+2n)}{(a+2)+(a+3)\dots(a+n+1)} a_0.$$

1° Démontrer que l'on a

$$(1) \quad a_{2p+1} - C^1_{2p+1} a_{2p} + C^2_{2p+1} a_{2p-1} - \dots + (-1)^{2p+1} a_0 \equiv 0,$$
$$(2) \quad b_{2p} - C^1_{2p} b_{2p-1} + C^2_{2p} b_{2p-2} - \dots + (-1)^{2p-1} b_1 \equiv 0.$$

2° En particulier, on fera $a + bi = \frac{\rho}{c}(\cos\omega + i\sin\omega)$, puis $c = 0$. De l'identité (1) correspondante, déduire qu'on peut, d'une infinité de manières, satisfaire à l'identité suivante :

$$\begin{aligned} A_0\cos(2n+1)\omega + A_1\cos\omega\cos 2n\omega & \\ + A_2\cos^2\omega\cos(2n-1)\omega & \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ + A_{2n+1}\cos^{2n+1}\omega & \equiv 0, \end{aligned}$$

$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ étant indépendants de ω, et n au moins de ces qualités étant arbitraires. R. GILBERT.

1751 (**1896**, 583). — Si l'on désigne par A_{ik} et B_{ik} les mineurs des déterminants

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

chacune des relations

$$\begin{vmatrix} a_{12}b_{13} - a_{13}b_{12} & a_{13}b_{11} - a_{11}b_{13} & a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11} \\ a_{22}b_{23} - a_{23}b_{22} & a_{23}b_{21} - a_{21}b_{23} & a_{21}b_{22} - a_{22}b_{21} \\ a_{32}b_{33} - a_{33}b_{32} & a_{33}b_{31} - a_{31}b_{33} & a_{31}b_{32} - a_{32}b_{31} \end{vmatrix} = 0$$

et

$$\begin{vmatrix} A_{12}B_{13} - A_{13}B_{12} & A_{13}B_{11} - A_{11}B_{13} & A_{11}B_{12} - A_{12}B_{11} \\ A_{22}B_{23} - A_{23}B_{22} & A_{23}B_{21} - A_{21}B_{23} & A_{21}B_{22} - A_{22}B_{21} \\ A_{32}B_{33} - A_{33}B_{22} & A_{33}B_{31} - A_{31}B_{33} & A_{31}B_{32} - A_{32}B_{31} \end{vmatrix} = 0$$

est la conséquence de l'autre. D. ARANT.

1754 (**1897**, 52). — Trouver un polynome entier en p

$$f(x, p) = A_0 p^m + A_1 p^{m-1} + \ldots + A_{m-1} p + A_m,$$

où $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m$ désignent des fonctions de la variable x, tel que l'intégrale générale de l'équation différen-

tielle

$$y = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$$

s'obtienne en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par une constante arbitraire.

Les équations ainsi obtenues ont-elles des intégrales singulières?

Nota. — On examinera plus particulièrement le cas où le polynome $f(x, p)$ est du second degré en p.

On écartera les solutions du problème qui conduisent à une *équation de Clairaut*. C. BOURLET.

1761 (**1897**, 148). — Cinq droites quelconques sont données dans un plan. On mène une transversale par un point fixe et, sur cette droite, on prend un sixième point qui forme une involution avec les cinq points déterminés par les cinq droites données. Le lieu géométrique de ce sixième point, quand la transversale tourne autour de son pivot, se compose de cinq coniques. E. DEWULF.

1762 (**1897**, 148). — Les caractéristiques des plans tangents à un cône de la classe n forment une surface d'ordre $2n+1$.

E DEWULF.

1763 (**1897**, 148). — Soient $C_n(x, y) = 0$, $C_m(x, y) = 0$ les équations de deux courbes d'ordres respectifs n et m. Si un point est commun à ces deux courbes et si son ordre de multiplicité est n' pour C_n et m' pour C_m, il appartient aussi à la courbe représentée par l'équation

$$\frac{\partial C_n}{\partial x}\frac{\partial C_m}{\partial y} - \frac{\partial C_n}{\partial y}\frac{\partial C_m}{\partial x} = 0,$$

et est multiple de l'ordre $m' + n' - 2$ pour cette courbe.

Donner une interprétation algébrique de ce théorème.

E. DEWULF.

1776 (**1897**, 387). — Soient $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ une forme positive et $\varphi(h) = \sum' \frac{1}{f(x, y)}$, la somme étant

étendue à tous les systèmes de valeurs entières des indéterminées x et y, tels que

$$f(x, y) \text{ soit } < h.$$

On excepte, bien entendu, le système particulier $x = q = 0$, ce que nous indiquons en affectant le signe Σ d'un accent.

Démontrer que la différence

$$\varphi(h) - \frac{\pi}{\sqrt{ac - b^2}} \log h$$

tend vers une limite déterminée quand h augmente indéfiniment.

J. Franel.

1777 (**1897**, 387). — Soient, plus généralement,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \Sigma\, a_{r,s} x_r x_s \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots, p \\ s = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

une forme positive des p variables $x_1, \ldots, x_p$, $D = |(a_{rs})|$ son déterminant et

$$\varphi(h) = \sum{}' \frac{1}{|f(x_1, x_2, \ldots, x_p)|^{\frac{p}{2}}},$$

la somme étant étendue à tous les systèmes de valeurs entières des variables (à l'exception du système $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$) satisfaisant à l'inégalité

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) < h.$$

Démontrer que la différence

$$\varphi(h) - \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{D}\, \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \log h$$

tend vers une limite déterminée quand h augmente indéfiniment.

J. Franel.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1917.

MATHÉMATIQUES.

Première composition : Géométrie analytique.

Étant donné le trièdre trirectangle $Oxyz$ *auquel la droite* D *est rapportée par les équations* $x-a=0$, $z-y=0$, *on abaisse de chaque point* M *de cette droite, sur* Oz, *la perpendiculaire* MI *dont le pied est* I; *puis on considère le cercle* C, *de centre* I *et de rayon* IM, *dont le plan passe par* Oz.

I. *Trouver l'équation de la surface* Σ *engendrée par le cercle* C.

II. *Étudier comment varie la section de cette surface par un plan parallèle à* Oxy *lorsque ce plan se déplace en conservant la même orientation.*

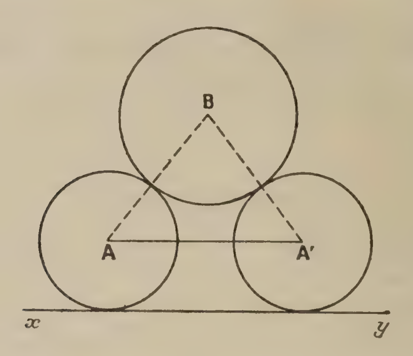
III. *Déterminer, sur la surface* Σ, *les systèmes de cercles autres que celui qui a servi à sa définition et faire voir comment on peut, pour chacun de ces systèmes, donner une construction géométrique des cercles qui le composent.* (4 heures.)

MATHÉMATIQUES.

Deuxième composition : Mécanique.

Dans un plan vertical, deux disques circulaires de centres A *et* A′, *de même rayon* a, *reposent sur*

une horizontale xy. Ils supportent un troisième disque circulaire B, *de rayon b. Les disques sont*



homogènes; leurs poids, en kilogrammes, sont p pour les deux premiers, q pour le troisième.

1° *Un fil inextensible de longueur l relie les deux disques inférieurs par leurs centres* A *et* A' *où il est attaché. L'équilibre étant établi, on demande de calculer les réactions des disques entre eux et avec xy, ainsi que la tension* T *du fil. On supposera ici les frottements négligeables.*

2° *Dans la même hypothèse, on remplace le fil inextensible par un ressort :* l_0 *est sa longueur naturelle et chaque unité de cette longueur reçoit un allongement k par kilogramme de tension. Étudier les conditions de l'équilibre.*

Le ressort, pour avoir une action efficace, ne devant être ni trop long ni trop mou, on supposera dans la discussion $l_0 < a + b$ *et l'on admettra que, pour une tension égale à* $\frac{q}{2}$, *l'allongement a une valeur* $l - l_0 < \sqrt{(a+b)^2 - l_0^2}$.

3° *Le coefficient de frottement f, supposé le même aux quatre contacts, cessant d'être négligé, exa-*

miner les conditions de l'équilibre sous l'effet du seul frottement, le fil AA' et le ressort étant supprimés.

L'angle $\widehat{ABA'} = 2\beta$ *étant donné, quelle est la limite inférieure des valeurs que peut prendre f pour que l'équilibre existe ?*

(4 heures.)

CALCUL.

Dans la formule

$$f(\lambda, \theta) = \frac{A\lambda^{-5}}{e^{\frac{B}{\lambda\theta}} - 1} \qquad \left\{ \begin{array}{l} e = 2,718 \\ A = 1,09 \times 10^4 \\ B = 1,46 \times 10^4 \end{array} \right\}$$

les variables λ et θ prennent respectivement les valeurs suivantes :

λ................ 0, 1, 2, 3, 4, 5
θ................ 0, 1000, 2000, 3000

Calculer les valeurs de $f(\lambda, \theta)$ *pour les* $6 \times 4 = 24$ *combinaisons des valeurs des variables, à l'approximation de la règle à calcul.*

N.-B. — La formule est celle de l'émission calorifique des radiations de longueur d'onde λ dans le spectre d'un corps noir porté à la température θ.

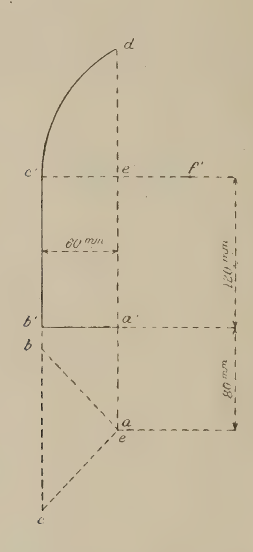
(1 heure.)

ÉPURE.

Un solide opaque, en forme d'obus, est engendré par la révolution, autour de la verticale a, de la surface a'b'c'd'e'a' située dans le plan de front de cette verticale; c'd' est un arc de cercle ayant pour centre le point f' symétrique du point c' par rapport à l'axe.

Un paraboloïde hyperbolique est défini par un

plan directeur qui est de profil et par deux génératrices horizontales (ab, $a'b'$), (ec, $e'c'$) *inclinées à* 45° *sur ce plan de profil.*



La surface du paraboloïde partage l'obus en deux parties.

On représentera celle qui contient l'arc $c'd'$.

On se conformera, pour la mise en place, aux données du croquis. Le point a *sera pris sur l'axe de la feuille, à* 80mm *au-dessus du bord inférieur de celle-ci.*

(4 heures.)

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1917.

Solution de la composition de Géométrie analytique (¹).

Par M. PHILBERT DU PLESSIS.

I. Les coordonnées du point M sont

$$x = a, \qquad y = z = \mu,$$

μ étant variable.

L'équation de la sphère de centre I et de rayon IM est

$$x^2 + y^2 + (z - \mu)^2 = a^2 + \mu^2$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\mu z = a^2.$$

L'équation du plan mené par Oz et M est

$$\frac{y}{x} = \frac{\mu}{a}.$$

Éliminant μ entre les deux dernières équations, on a l'équation de la surface Σ

$$(1) \qquad (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)x - 2ayz = 0.$$

Cette équation définit une surface du troisième ordre rencontrée par le plan de l'∞ suivant l'ombilicale et la droite à l'∞ du plan Oyz.

(¹) *Voir* l'énoncé ci-dessus, p. 249.

II. Si nous coupons la surface par le plan $z = h$, nous obtenons, pour la projection de la section sur le plan Oxy, l'équation

$$(2) \qquad x(x^2+y^2)+(h^2-a^2)x-2ahy=0,$$

qui définit une cubique circulaire Γ admettant l'origine O à la fois pour point et pour centre, et l'axe Oy pour asymptote.

Remarquons d'ailleurs que l'équation ne change pas si l'on remplace simultanément x par $-x$ et h par $-h$. Il en résulte que les cubiques Γ correspondant à deux plans de section symétriques par rapport au plan Oxy sont elles-mêmes symétriques par rapport à Oy, ce qui permet de limiter la discussion aux valeurs positives de h.

L'allure générale de la courbe résulte sans ambiguïté de la connaissance des trois éléments suivants :

1° Tangente TT′ à l'origine $y = \dfrac{h^2-a^2}{2ah}x$, dont le coefficient angulaire est

$$\left\{\begin{matrix}\text{négatif}\\ \text{nul}\\ \text{positif}\end{matrix}\right\} \quad \text{suivant que} \quad \left\{\begin{matrix}h<a\\ h=a\\ h>a\end{matrix}\right\}.$$

2° Points de rencontre K, K′, avec Ox, donnés par $x = \pm\sqrt{a^2-h^2}$, donc réels si $h < a$, et confondus avec O si $h = a$.

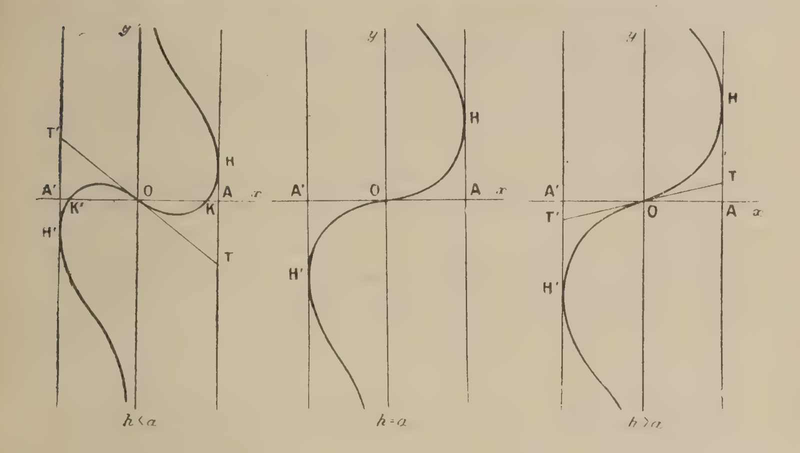
3° Points de contact H, H′, avec les droites $x = a$ et $x = -a$, donnés respectivement par $y = h$ et $y = -h$.

D'où les trois formes représentées.

Pour $h = 0$, la cubique se décompose en le cercle de centre O et de rayon OA, et l'axe Oy.

La détermination des points H et H′ est immédiate,

puisque $AH = A'H' = h$. Remarquons qu'on en déduit très facilement les points K et K' et la tangente TT'. En effet, l'expression de l'abscisse des points K



et K' (2°) montre que ces points sont sur le cercle de centre O qui passe par les points communs au cercle de diamètre OA et au cercle de centre A et de rayon AH. D'autre part, d'après l'équation de la tangente à l'origine, on a $AT = \frac{h^2 - a^2}{2h}$. On en déduit immédiatement que $OT = TH = \frac{a^2 + h^2}{2h}$ et, par suite, que le point T est sur la perpendiculaire élevée au segment de droite OH en son milieu.

Remarquons aussi que l'enveloppe des sections considérées, en projection sur Oxy, se composant des droites $x = a$ et $x = -a$, ces deux droites constituent le contour apparent de la surface sur Oxy. Toute la partie réelle de la surface se trouve donc comprise entre les plans $x = a$ et $x = -a$, qui la touchent suivant des droites respectivement contenues dans les plans $y - z = 0$ et $z + y = 0$, droites qui sont symé-

triques par rapport à Oz. Il suit de là que toute droite réelle située sur la surface est nécessairement contenue dans un plan parallèle à Ozy.

III. D'après la remarque qui termine le n° I, tout plan mené par une droite réelle de Σ (mais non par la droite à l'∞ de Oyz) coupe cette surface suivant une conique qui passe par les ombilics de ce plan, c'est-à-dire suivant un cercle. Puisque, d'après la remarque qui termine le n° II, une telle droite se trouve nécessairement dans un plan parallèle au plan Oyz, formons la section de Σ par le plan $x = k$; cette section se projette sur Oyz suivant l'hyperbole

$$ky^2 - 2ayz + kz^2 + k(k^2 - a^2) = 0,$$

qui ne dégénère en un système de droites que pour $k = 0$, ce qui donne les axes Oy et Oz, et pour $k = \pm a$, ce qui donne la droite D de la définition et sa symétrique D' par rapport à Oz.

Les plans sécants menés par Oz donnent un premier système de cercles qui sont ceux de la définition.

Les plans par Oy en donnent un second qui se définissent comme les premiers avec simple remplacement de l'axe Oy par l'axe Oz, ce qui était bien évident *a priori* puisque, dans l'équation (1), on peut permuter les variables y et z.

Considérons maintenant les plans passant par D

$$(6) \qquad y - z = \lambda(x - a).$$

Puisqu'ils coupent Σ suivant des cercles, on doit pouvoir, par combinaison de (1) et (6), obtenir une sphère. Or (1) peut s'écrire

$$(x - a)(x^2 + y^2 + z^2 + ax) + a(y - z)^2 = 0.$$

En y remplaçant $y - z$ par sa valeur (6), on a

$$(7) \qquad x^2 + y^2 + z^2 + (1 + \lambda^2) a x - \lambda^2 a^2 = 0.$$

Les cercles donnés, pour chaque valeur de λ, par l'intersection des sphères (7) par les plans (6), appartiennent donc à Σ.

De même pour ceux situés dans les plans passant par D', obtenus par le même calcul que ci-dessus avec simple remplacement de $y - z$ et de $x - a$ respectivement par $y + z$ et $x + a$.

Voyons maintenant comment peut être défini géométriquement chaque cercle donné par l'intersection de (6) et (7), que nous appellerons *cercle* (λ), commun au plan (λ) et à la sphère (λ) d'équations respectives (6) et (7).

Remarquons d'abord que sur chaque sphère (λ) il y a deux cercles (λ) donnés par les deux plans (λ) correspondant à la même valeur de λ prise positivement ou négativement.

Il suffit de faire $x = y = 0$ dans (6) et (7) pour voir d'abord que les plans des deux cercles passent par les points où la sphère est coupée par Oz. Donc, *une sphère* (λ) *étant obtenue, il suffit de prendre les deux plans menés par ses points d'intersection avec* Oz *et la droite* D, *pour obtenir sur cette sphère les deux cercles* (λ) *qui lui appartiennent.*

Reste à définir géométriquement une sphère (λ). Il suffit de jeter les yeux sur (7) pour voir que :

1° Cette sphère a son centre sur Ox;

2° Elle coupe le plan $x = a$ suivant un cercle imaginaire *fixe* dont la projection sur Oyz est

$$y^2 + z^2 + 2a^2 = 0.$$

Autrement dit, toutes les sphères (λ) ont un plan

radical commun. Le cercle suivant lequel elles le coupent est imaginaire; mais il existera une sphère Ω concentrique à ce cercle, c'est-à-dire de centre $x = a$, $y = 0$, $z = 0$ (point de rencontre A de la droite D et de Ox) qui sera orthogonale à toutes les sphères (λ).

Pour obtenir cette sphère orthogonale commune, il suffit de construire l'une quelconque des sphères (λ), par exemple, celle qui correspond à $\lambda = 0$,

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax = 0,$$

qui est celle qui a pour diamètre OA', A' étant le symétrique de A par rapport à O. Il suffit, de A comme centre, de décrire une sphère orthogonale à celle-ci : c'est la sphère Ω. *Pour avoir une sphère* (λ) *quelconque, il n'y a plus qu'à décrire, d'un point quelconque de* Ox *comme centre, une sphère orthogonale à la sphère fixe* Ω.

Pour le quatrième système de cercles, donné par D', même construction que la précédente en intervertissant simplement les rôles des points A et A'.

[L¹5b]

PROPRIÉTÉS RELATIVES AUX NORMALES ABAISSÉES D'UN POINT D'UNE ELLIPSE SUR CETTE ELLIPSE;

Par E.-N. BARISIEN.

Pour l'homogénéité de cette Note, nous allons donner plusieurs propriétés dont quelques-unes sont connues, et que nous relaterons aussi. Nous donnerons les résul-

tats sans aucune démonstration; ces propriétés se démontrent assez aisément, en général.

Notations et équations. — Soit l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Du point M de cette courbe on abaisse les normales MP, MQ, MR et l'on prend M' symétrique de M par rapport au centre O de l'ellipse.

Soient α l'angle d'anomalie excentrique en M, et φ l'angle d'anomalie excentrique en P.

L'angle α est déterminé en fonction de φ par les formules

$$\cos\alpha = \frac{(c^4\sin^2\varphi - b^4)\cos\varphi}{a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi}, \qquad \sin\alpha = \frac{(c^4\cos^2\varphi - a^4)\sin\varphi}{a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi},$$

$$\frac{\sin\varphi(\cos\alpha - \cos\varphi)}{\cos\varphi(\sin\alpha - \sin\varphi)} = \frac{b^2}{a^2}.$$

On trouve les équations suivantes :

Normale MP :

$$ax\sin\varphi - by\cos\varphi - c^2\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Droite QR :

$$b^3x\cos\varphi - a^3y\sin\varphi + \frac{a^3b^3}{c^2} = 0.$$

Droite PM' :

$$b^3x\cos\varphi + a^3y\sin\varphi - ab(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) = 0.$$

Cercle PQRM', *ou cercle de Joachimsthal relatif au point* M :

$$x^2 + y^2 - \frac{b^2x}{a}\cos\alpha - \frac{a^2y}{b}\sin\alpha - (a^2 + b^2) = 0.$$

Coordonnées du centre C *du cercle circonscrit au*

triangle PQR :

$$x_C = \frac{b^2}{2a}\cos\alpha, \qquad y_C = \frac{a^2}{2b}\sin\alpha.$$

Coordonnées du centre de gravité G *du triangle* PQR :

$$x_G = \frac{a(a^2+b^2)}{3c^2}\cos\alpha, \qquad y_G = -\frac{b(a^2+b^2)}{3c^2}\sin\alpha.$$

Coordonnées de l'orthocentre H *du triangle* PQR :

$$x_H = \frac{(a^4+b^4)}{ac^2}\cos\alpha, \qquad y_H = -\frac{(a^4+b^4)}{bc^2}\sin\alpha.$$

Coordonnées du centre ω *du cercle des neuf points du triangle* PQR :

$$x_\omega = \frac{(2a^4+b^4+a^2b^2)}{4ac^2}\cos\alpha,$$

$$y_\omega = -\frac{(a^4+2b^4+a^2b^2)}{4bc^2}\sin\alpha.$$

Droite d'Euler (CGHω) *du triangle* PQR :

$$\begin{aligned} &a(3a^4+2b^4-a^2b^2)x\sin\alpha \\ &\quad + b(2a^4+3b^4-a^2b^2)y\cos\alpha \\ &\quad - (a^2+b^2)(a^4+b^4)\sin\alpha\cos\alpha = 0. \end{aligned}$$

Hauteur du triangle PQR *issue de* P :

$$a^3x\sin\varphi + b^3y\cos\varphi = (a^4+b^4)\sin\varphi\cos\varphi.$$

Médiatrice du triangle PQR *relative au côté* QR :

$$a^3x\sin\varphi + b^3y\cos\varphi + \frac{a^4b^4\sin\varphi\cos\varphi}{a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi} = 0.$$

Hyperbole d'Apollonius MPQR :

$$c^2xy - a^3y\cos\alpha + b^3x\sin\alpha = 0.$$

Paraboles passant par M, P, Q, R :

$$c^2(bx \pm ay)^2 + 2ab^4 x \sin\alpha - 2a^4 by \cos\alpha \pm a^2b^2c^2 = 0.$$

Hyperbole équilatère passant par M′, P, Q, R :

$$c^2(x^2 - y^2) - \frac{b^2}{a}(a^2 + b^2)x\cos\alpha$$
$$- \frac{a^2}{b}(a^2 + b^2)y\sin\alpha - (a^4 + b^4) = 0.$$

Paraboles passant par M′, P, Q, R :

$$c^2x^2 - ab^2x\cos\alpha - \frac{a^4}{b}y\sin\alpha - a^4 = 0,$$
$$c^2y^2 + \frac{b^4}{a}x\cos\alpha + a^2by\sin\alpha + b^4 = 0.$$

Propriétés. — I. *L'enveloppe du cercle* PQR *est la quartique*

$$a^2b^2(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 = b^6x^2 + a^6y^2.$$

Son équation en coordonnées polaires est

$$r = \frac{1}{2ab}\Big[\sqrt{a^6\sin^2\theta + b^6\cos^2\theta}$$
$$\pm\sqrt{b^2(2a^2 + b^2)^2\cos^2\theta + a^2(a^2 + 2b^2)^2\sin^2\theta}\Big].$$

Cette quartique se compose de deux ovales. Le plus petit a les mêmes longueurs d'axes que l'ellipse, $2a$ et $2b$. Le plus grand a pour longueurs d'axes

$$\frac{2(a^2 + b^2)}{a} \quad \text{et} \quad \frac{2(a^2 + b^2)}{b}.$$

La somme des aires de ces deux ovales est

$$S = \frac{\pi}{2a^2b^2}(a^2 + b^2)(a^4 + 3a^2b^2 + b^4)$$
$$= \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2) + \frac{\pi(a^2 + b^2)^3}{2a^2b^2}.$$

II. *La puissance du centre* O *de l'ellipse par rapport au cercle* PQR *est constante et égale à* $-(a^2+b^2)$.

III. *Le cercle* PQR *est bitangent à sa courbe enveloppe.*

Pour le cercle

$$x^2+y^2-\frac{b^2x}{a}\cos\alpha-\frac{a^2y}{b}\sin\alpha-(a^2+b^2)=0,$$

les deux points de contact sont situés sur la droite

$$b^3x\sin\alpha-a^3y\cos\alpha=0.$$

IV. *Si* R *est le rayon du cercle* PQR, *et* O′ *le centre de ce cercle, on a*

$$R^2=a^2+b^2+\overline{OO'}^2.$$

Si $r=\sqrt{a^2+b^2}$ est le rayon du cercle de Monge ou lieu du sommet des angles droits circonscrits à l'ellipse, cette relation devient

$$R^2=r^2+\overline{OO'}^2,\qquad R^2-r^2=\overline{OO'}^2.$$

Il en résulte que : *le cercle* PQR *coupe le cercle de Monge de l'ellipse donnée suivant un diamètre de ce dernier cercle.*

V. *Les trois côtés du triangle* PQR *enveloppent l'ellipse*

$$\frac{x^2}{a^6}+\frac{y^2}{b^6}=\frac{1}{c^4}.$$

VI. *Le lieu du centre* C *du cercle circonscrit au triangle* PQR *est l'ellipse*

$$a^6x^2+b^6y^2=\frac{a^4b^4}{4}.$$

VII. *Le lieu du centre de gravité* G *du triangle* PQR *est l'ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{9c^4}.$$

VIII. *Le lieu de l'orthocentre* H *du triangle* PQR *est l'ellipse*

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = \frac{(a^4 + b^4)^2}{c^4}.$$

IX. *Le lieu du centre* ω *du cercle d'Euler du triangle* PQR *est l'ellipse*

$$\frac{a^2 x^2}{(2a^4 + b^4 + a^2 b^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(a^4 + 2b^4 + a^2 b^2)^2} = \frac{1}{16c^4}.$$

X. *La corde de contact* (III) *du cercle* PQR *avec son enveloppe est perpendiculaire à la tangente en* C *à l'ellipse* (VI).

XI. *Le milieu de chacune des droites* MC, MG, MH, Mω *décrit une ellipse.*

XII. *Chacune des droites* MC, MG, MH, Mω *est normale à une ellipse fixe.*

XIII. *La droite d'Euler du triangle* PQR *est normale à l'ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2(3a^4 + 2b^4 - a^2 b^2)^2} + \frac{y^2}{b^2(2a^4 + 3b^4 - a^2 b^2)^2}$$
$$= \frac{(a^2 + b^2)^2 (a^4 + b^4)^2}{c^4 [9(a^4 + b^4)^2 - a^2 b^2 (a^2 + b^2)^2]^2}.$$

XIV. *Le lieu du point de rencontre de la droite d'Euler du triangle* PQR *avec la normale à l'ellipse donnée en* M *est une ellipse.*

XV. *Le lieu du point de rencontre des droites* MP *et* QR *est la sextique unicursale dont les coordonnées*

paramétriques sont

$$x = \frac{a^3(c^4 \sin^2\varphi + b^4)\cos\varphi}{c^2(a^4\sin^2\varphi - b^4\cos^2\varphi)}, \quad y = \frac{b^3(c^4\cos^2\varphi + a^4)\sin\varphi}{c^2(a^4\sin^2\varphi - b^4\cos^2\varphi)}.$$

XVI. *Le lieu du point de rencontre des droites* PM′ *et* QR *est la quartique unicursale dont les coordonnées paramétriques sont*

$$x = \frac{a[c^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) - a^2b^2]}{2b^2c^2\cos\varphi},$$

$$y = \frac{b[c^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) + a^2b^2]}{2a^2c^2\sin\varphi}.$$

XVII. *La droite* PM′ *enveloppe une sextique unicursale dont les coordonnées paramétriques sont*

$$x = \frac{a}{b^2}[2b^2 - a^2 + c^2\cos^2\varphi]\cos\varphi,$$

$$y = \frac{b}{a^2}[2a^2 - b^2 - c^2\sin^2\varphi]\sin\varphi,$$

et qui a pour aire

$$U = \frac{\pi(10a^2b^2 - a^4 - b^4)}{8ab}.$$

Si $a = b\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$, on a $U = 0$; dans ce cas, la courbe ayant deux points doubles et trois boucles, l'aire de la boucle centrale est équivalente à la somme des aires des deux autres boucles. Les droites QM′ et RM′ enveloppent la même sextique.

XVIII. *Le lieu des projections de* O *sur les droites* PM′, QM′, RM′ *est la sextique unicursale qui a pour équation*

$$(x^2 + y^2)^2(a^6x^2 + b^6y^2) = (a^4x^2 + b^4y^2)^2.$$

L'aire de cette courbe est

$$U = \frac{\pi[a^8 + b^8 + 2a^3b^3(a^2 + b^2 + ab)]}{2(a^3 + b^3)^2}.$$

XIX. *Le lieu des milieux des cordes* PM′, QM′, RM′ *est la sextique unicursale*

$$(a^2x^2 + b^2y^2)(b^2x^2 + a^2y^2)^2 = a^4b^4(x^2 + y^2)^2,$$

dont l'aire est

$$U = \frac{\pi ab(a^4 + b^4 + 6a^2b^2)}{2(a^2 + b^2)^2}.$$

XX. *Le lieu des pôles des cordes* PM′, QM′, RM′ *par rapport à l'ellipse donnée est la podaire centrale de cette ellipse*

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$$

XXI. *Le lieu du milieu des côtés du triangle* PQR *est la quartique unicursale*

$$c^4(b^2x^2 + a^2y^2)^2 = a^4b^4(a^2x^2 + b^2y^2),$$

dont l'aire est

$$U = \frac{\pi ab(a^4 + b^4)}{2c^4}.$$

XXII. *Les hauteurs du triangle* PQR *sont normales à l'ellipse*

$$\frac{x^2}{a^6} + \frac{y^2}{b^6} = \frac{(a^4 + b^4)^2}{(a^6 - b^6)^2}.$$

XXIII. *Les médiatrices du triangle* PQR *enveloppent une courbe unicursale du dixième degré, qui a pour aire*

$$U = \frac{\pi[c^4(a^4 + b^4 + 4a^2b^2) - 3a^4b^4]}{2ab(a^2 + b^2)^2}.$$

XXIV. *Le lieu de la projection de* O *sur les hauteurs du triangle* PQR *est la sextique unicursale*

$$(x^2+y^2)^2(b^6x^2+a^6y^2)=(a^4+b^4)^2x^2y^2$$

qui a pour aire

$$U=\frac{\pi(a^4+b^4)^2}{2(a^3+b^3)^2}.$$

XXV. *Le lieu du milieu des cordes interceptées par les hauteurs du triangle* PQR *dans l'ellipse donnée est la sextique unicursale*

$$(b^2x^2+a^2y^2)^2(b^{10}x^2+a^{10}y^2)=(a^4+b^4)^2a^4b^4x^2y^2.$$

XXVI. *Le lieu du pôle par rapport à l'ellipse donnée des hauteurs du triangle* PQR *est la kreuzcurve*

$$\frac{a^{10}}{x^2}+\frac{b^{10}}{y^2}=(a^4+b^4)^2.$$

XXVII. *Le lieu de la projection de* O *sur les médiatrices du triangle* PQR *est la courbe unicursale du huitième degré*

$$(x^2+y^2)^2(b^2x^2+a^2y^2)^2=x^2y^2(b^6x^2+a^6y^2),$$

dont l'aire est

$$U=\frac{\pi(a^5+b^5)}{2(a+b)^3}=\frac{\pi[a^4+b^4+a^2b^2-ab(a^2+b^2)]}{2(a+b)^2}.$$

XXVIII. *Le lieu du milieu des cordes interceptées dans l'ellipse donnée par les médiatrices du triangle* PQR *est la courbe du huitième degré*

$$(b^2x^2+a^2y^2)^2(b^6x^2+a^6y^2)^2=a^4b^4x^2y^2(b^{10}x^2+a^{10}y^2).$$

XXIX. *Le lieu du pôle par rapport à l'ellipse des cordes formées par les médiatrices du triangle*

PQR *est la sextique*

$$x^2y^2(b^{10}x^2 + a^{10}y^2) = (b^6x^2 + a^6y^2)^2.$$

XXX. *Le lieu des pieds des hauteurs du triangle* PQR *est une sextique unicursale.*

XXXI. *Le lieu du milieu des hauteurs du triangle* PQR *est une sextique unicursale.*

XXXII. *L'hyperbole d'Apollonius* MPQR *enveloppe la kreuzcurve*

$$c^4x^2y^2 = b^6x^2 + a^6y^2.$$

Cette kreuzcurve est aussi le *lieu des pôles des cordes normales à l'ellipse donnée.*

XXXIII. *Le lieu du centre de l'hyperbole d'Apollonius* MPQR *est l'ellipse*

$$\frac{x^2}{a^6} + \frac{y^2}{b^6} = \frac{1}{c^4},$$

qui est aussi *l'enveloppe* (V) *des côtés du triangle* PQR.

XXXIV. *Le lieu des sommets de l'hyperbole d'Apollonius* MPQR *se compose de deux quartiques*

$$b^6x^4 + a^6y^4 = \frac{a^6b^6(x+y)^2}{c^4},$$

$$b^6x^4 + a^6y^4 = \frac{a^6b^6(x-y)^2}{c^4}.$$

XXXV. *Les paraboles passant par* M, P, Q, R *enveloppent les deux quartiques*

$$c^4[(bx+ay)^2 - a^2b^2]^2 = 4a^2b^2(b^6x^2 + a^6y^2),$$

$$c^4[(bx-ay)^2 + a^2b^2]^2 = 4a^2b^2(b^6x^2 + a^6y^2).$$

XXXVI. *Les axes des paraboles* MPQR *sont parallèles aux diagonales du rectangle des axes de l'ellipse donnée.*

XXXVII. *Le lieu du sommet des paraboles* MPQR *se compose de deux quartiques.*

XXXVIII. *L'hyperbole équilatère* M'PQR *enveloppe la quartique*

$$a^2 b^2 [c^2(x^2 - y^2) - (a^4 + b^4)]^2 = (a^2 + b^2)^2 (b^6 x^2 + a^6 y^2).$$

XXXIX. *Le lieu du centre de l'hyperbole* M'PQR *est l'ellipse*

$$a^6 x^2 + b^6 y^2 = \frac{a^4 b^4 (a^2 + b^2)^2}{4 c^4}.$$

XL. *Le lieu des sommets de l'hyperbole* M'PQR *se compose de deux quartiques.*

XLI. *Les paraboles passant par* M', P, Q, R *enveloppent deux quartiques*

$$b^2 (c^2 x^2 - a^4)^2 = a^2 (b^6 x^2 + a^6 y^2),$$
$$a^2 (c^2 y^2 + b^4)^2 = b^2 (b^6 x^2 + a^6 y^2).$$

XLII. *Le lieu des sommets des paraboles* M'PQR *se compose des deux quartiques*

$$b^6 (c^2 x^2 + a^4)^2 = a^6 y^2 (a^2 b^4 - 4 c^4 x^2),$$
$$a^6 (c^2 y^2 - b^4)^2 = b^6 x^2 (a^4 b^2 - 4 c^4 y^2).$$

XLIII. *Les centres des quatre cercles de Joachimsthal circonscrits aux triangles* PQR, MPQ, MQR, MPR, *et le milieu de* OM *sont situés sur l'hyperbole équilatère*

$$xy = \frac{ab \sin\alpha \cos\alpha}{4}.$$

Cette dernière propriété existe si M est un point

quelconque (α, β) du plan de l'ellipse donnée. L'hyperbole est alors

$$xy = \frac{\alpha\beta}{4}.$$

[C2k]

SUR QUELQUES RAPPORTS REMARQUABLES ENTRE VOLUMES;

PAR M. A. BUHL.

1. Je note ici quelques exercices très simples construits pour les candidats à la Licence. La conservation des volumes et des aires, soit exacte, soit à un facteur constant près, est un problème complètement traité au point de vue général. Ceci n'entraîne point cependant qu'on se désintéresse, par exemple, du théorème concernant la projection plane des aires planes. On trouvera, dans ce qui suit, des théorèmes d'une simplicité analogue et même plus simples à un certain point de vue. Les aires qui se conservent, à un facteur constant près, par projection sur un plan, sont des aires prises sur les surfaces dont le plan tangent fait un angle constant avec un plan fixe, soit le plan Oxy. Elles ont alors pour équation aux dérivées partielles

$$p^2 + q^2 = \text{const.}$$

et sont des hélicoïdes développables. Nous allons passer en revue quelques résultats du même genre, dépendant aussi d'équations aux dérivées partielles du premier ordre qui auront, sur la précédente, l'avantage d'être linéaires.

Dans le même ordre d'idées j'ai donné, dans une seconde Note : *Sur les volumes dus à la rotation d'un contour* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1916), un théorème concernant les volumes tournants engendrés par des contours tracés sur les quadriques ; un tel contour et sa projection sur un plan principal donnent, en tournant autour d'un axe principal situé dans le plan principal considéré, des volumes de révolution en rapport constant. Je n'y reviens que pour signaler que ce théorème doit être naturellement rapproché des suivants, bien qu'on puisse le rattacher à d'autres considérations plus élevées figurant dans des travaux beaucoup plus étendus auxquels on pourra se reporter par l'intermédiaire du *Bulletin*.

2. *Soit un cône* Γ *quelconque, de sommet* S, *portant sur l'une de ses nappes un contour* γ *déterminant une cloison* A. *Soit* Π *un plan quelconque, sur lequel* S *se projette en* O *et* A *en* P. *Le cône de sommet* O, *ayant la base conique* A, *et le cône de sommet* S, *ayant la base plane* P, *ont des volumes égaux.*

Rappelons tout d'abord que si l'on considère une cloison A, appartenant à une surface quelconque

$$z = f(x, y),$$

le cône, ayant A pour base gauche et dont le sommet est à l'origine O, a pour volume

$$\frac{1}{3}\int\int_{P} (z - px - qy)\, dx\, dy.$$

Si $OS = k$, un cône Γ peut être considéré comme défini par l'équation

$$z - px - qy = k$$

qui exprime qu'il s'agit d'une surface dont le plan tangent passe par un point fixe $S(0, 0, k)$. Dans ces conditions l'intégrale double précédente prend une forme qui démontre immédiatement le théorème. On pourrait donner à celui-ci des formes diverses. Soit, par exemple, un cylindre à section droite fermée, de génératrices parallèles à OS. Sur des cônes Γ_i divers, il découpe des cloisons A_i; tous les volumes coniques OA_i sont égaux.

3. Passons maintenant à des proportionnalités entre volumes de natures plus différentes. Considérons, par exemple, le problème suivant :

A quelles surfaces doit appartenir une cloison A, *se projetant en* P *sur* Oxy, *pour que le volume conique* OA *soit proportionnel au volume engendré par* P *tournant autour de* Ox?

Cette question se traduit immédiatement par l'équation

$$\frac{1}{3}\int\int_P (z - px - qy)\,dx\,dy = 2\lambda\pi\int\int_P y\,dx\,dy,$$

où λ est le facteur de proportionnalité. Celle-ci entraîne l'équation aux dérivées partielles

$$z - px - qy = 6\pi\lambda y$$

qui exprime que, le plan tangent en un point quelconque M des surfaces cherchées coupant Oz en T, le segment OT est proportionnel à y, seconde coordonnée de M. Par une intégration immédiate, on a pour équation finie desdites surfaces

$$z = 6\pi\lambda y\left[\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \log y\right].$$

La fonction φ est arbitraire.

4. Soit toujours A une cloison appartenant à une surface quelconque; en joignant à l'origine tous les points de A, on définit un cône ayant A pour base gauche et dont je désigne le volume par V_0. De même, en projetant tous les points de A sur le plan Oxy, parallèlement à Oz, on définit, entre la base gauche A et la base plane P de Oxy, un volume cylindrique U_z. Soit à *déterminer les surfaces telles que* $\lambda V_0 = U_z$, le coefficient λ étant une constante. L'égalité

$$\frac{\lambda}{3}\int\int_P (z - px - qy)\,dx\,dy = \int\int_P z\,dx\,dy$$

donne

$$\lambda(z - px - qy) = 3z.$$

Or $z - px - qy$ est l'ordonnée du point T où le plan tangent, en un point quelconque de A, coupe Oz. Les surfaces cherchées ont donc, pour tous leurs points M, un segment OT proportionnel à l'ordonnée z de M. Leur équation finie

$$z^\lambda = x^{\lambda-3}\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

montre d'ailleurs que ce sont des cas particuliers des surfaces de M. Jamet (E. Picard, *Traité d'Analyse*, 2e édition, p. 433), surfaces riches en propriétés remarquables et déjà rencontrées plusieurs fois dans mes précédentes publications.

Pour $\lambda = 3$ on a les conoïdes droits d'axe Oz; pour tout contour fermé y tracé, on a $3V_0 = U_z$. Si l'un de ces conoïdes se réduit à un plan parallèle à Oxy, on retrouve le théorème élémentaire sur le volume du cône comparé au volume du cylindre de même base et même hauteur. On voit que ce théorème a une extension simple, immédiate, qui peut d'ailleurs être justifiée sans peine par des considérations purement géomé-

triques et qui, cependant, n'est pas ordinairement considérée sous un tel jour.

Pour $\lambda = -3$ on a, entre autres surfaces, le cylindre parabolique $2pz = x^2$. En valeur absolue on a encore $3V_0 = U_z$; le changement de signe de λ provient simplement de ce que, pour les conoïdes précédents, les volumes V_0 et U_z étaient d'un même côté de la cloison A, tandis que maintenant ils sont de part et d'autre de cette cloison.

La surface obtenue pour λ quelconque peut aussi, en coordonnées semi-polaires, être représentée par l'équation

$$z^\lambda = r^{\lambda-3}\psi(\theta),$$

d'où des surfaces de révolution pour $\psi(\theta)$ réduit à une constante. En reprenant $\lambda = -3$, on trouve le paraboloïde $2pz = r^2$, si bien que la parabole $2pz = x^2$, du plan Oxz, par une translation rectiligne parallèle à Oy ou par rotation autour de Oz, donne, dans les deux cas, des surfaces ayant la même propriété quant aux volumes V_0 et U_z que l'on peut y attacher.

CORRESPONDANCE.

M. **P. Carissan.** — *Description mécanique de la spirale logarithmique.* — Il est possible d'obtenir un tracé rigoureux de cette courbe fondamentale au moyen d'un appareil très simple, inventé et construit par l'auteur pour quelques élèves de collège en 1914, issu de la remarque suivante :

Les deux arcs : 1° de la spirale $\Sigma\ \rho = A^\omega (A > 0)$,

2° de l'hélice circulaire H de pas h et de rayon R, $x = R\cos u$, $y = R\sin u$, $z = Rmu$, ont même expression différentielle en fonction : 1° de la cote de l'extrémité M de l'arc pour l'hélice ; 2° de son rayon vecteur pour la spirale.

En effet, on a

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\omega^2,$$

(1) $$\sigma = \frac{\sqrt{1 + LA^2}}{LA}(\rho_1 - \rho_0),$$

où LA = log. nép. A et $ds^2 = R^2(1 + m^2)\,du^2$,

(2) $$s = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m}(z_1 - z_0)$$

pour l'un et l'autre cas.

Cela posé, si l'on parvient à établir une connexion matérielle telle que la double condition $s = \sigma$, $\rho = z$ soit effectivement satisfaite d'une façon continue dans le champ de l'instrument, on aura réalisé un traceur de Σ, avec les relations métriques

(3) $$LA = m = \frac{h}{2\pi R} = \cot V,$$

V étant l'angle intérieur de la tangente à la spirale avec le rayon vecteur OM.

La rotation d'une vis ordinaire, armée d'une molette roulante perpendiculaire, solidaire d'un moyeu-écrou qui épouse la vis, satisfait à la condition continue $\rho = z$, et permet d'appliquer l'hélice H sur la spirale Σ. La vis tourne tout d'une pièce, non sur elle-même, mais en balayant de son axe un plan P′ autour d'un point fixe O′ de cet axe et de ce plan. La molette, de rayon R, appuie légèrement par son bord sur un plan P, parallèle à P′ (distance R), et roule sans glisser sur ce plan P, ce qui réalise la condition $s = \sigma$.

L'appareil, de construction aisée, se compose donc essentiellement : 1° d'une vis ordinaire ; 2° d'une molette-écrou finement dentée mobile le long et autour de la vis ; 3° d'un pivot-étrier OO', recevant en O' l'extrémité polaire de la vis, tandis que son pied est au pôle O de la spirale sur une planchette circulaire P. Le point de contact de la molette et du plan P décrit la spirale avec une grande précision à partir d'un cercle de quelques millimètres autour du pôle-asymptote.

Classification des spirales d'après les constantes de la vis :

$$h < 2\pi R, \quad A < e; \qquad h > 2\pi R, \quad A > e;$$
$$h = 2\pi R, \qquad A = e.$$

Ainsi, *une molette roulante embrayée sur une vis tournante de pas égal au périmètre de la molette engendre précisément, par son point de contact, la spirale logarithmique même $\rho = e^{\omega}$.*

Pour les vis dont le pas est inférieur à ce périmètre, la base A est plus petite que *e*.

Pour celles (vis à long enroulement et à long écrou) dont le pas est supérieur, la base est plus grande que *e*.

Perfectionnements et remarques. — 1° Il importe peu que la vis tourne plutôt que le plateau ou même tous les deux à la fois. On peut aussi restreindre le champ de la rotation en la limitant à un faible secteur, à condition de relever la vis à bout de course pendant le mouvement rétrograde, à l'aide d'un encliquetage.

2° En soudant bout à bout deux vis symétriques, ou de pas inverse de part et d'autre du point O, et en armant chacune d'elles d'une molette, la distance des

deux molettes MM′ représente la fonction hyperbolique $A^x + A^{-x}$.

3° Un curvimètre ordinaire, tournant autour de l'axe de son manche, projeté au point fixe O, fournit le tracé théorique immédiat de la spirale logarithmique ; pour un instrument de ce genre

$$R = 3^{mm},5; \qquad h = 0,5; \qquad A = 1,001; \qquad V = 87^{\circ}\,30',$$

les spires sont très rapprochées bien que séparées à l'œil nu et que leur dilatation progressive soit manifeste.

4° Il est possible d'établir un mécanisme asymptote déroulé uniquement dans le temps et dans un espace fini et fournissant par leurs différences une suite illimitée de décimales ou de logarithmes de nombres croissants, par l'adjonction d'un parallélogramme articulé dont un côté est constitué par la vis prenant des positions de plus en plus inclinées. Cet appareil, à l'étude, plus compliqué, oscillerait à la façon d'un pendule.

5° Sur un cône quelconque, on obtient une hélice conique. Le traceur logarithmique équivaut, à la rigueur, à une présentation expérimentale des logarithmes, en permettant de constater la propriété fondamentale du produit sur des couples de valeurs numériques choisies arbitrairement.

Nous ressentons vivement l'honneur qui nous est fait d'une présentation dans ce Recueil, sous les auspices d'une entité essentielle (conquête lumineuse et sereine des méditations de tant d'hommes supérieurs, parmi lesquels brille Hermite), de ce nombre e, trouvé une fois de plus en corrélation avec cet autre π, dans la conjugaison harmonieuse d'un transformateur cinéma-

tique primordial; de l'humble outil qu'est la vis aux mains d'un modeste artisan.

M. G Fontené. — *Au sujet de la question* 711, IV. — Comme je l'ai montré précédemment (1916, p. 272) l'énoncé de l'auteur est exact. Un énoncé rectifié a été donné par M. J. de Virieu, en 1865, page 79; voici cet énoncé :

« Une équation de la forme

$$x^m f(a) + x^{m-1} f(a+1) + x^{m-2} f(a+2) + \ldots = 0,$$

dans laquelle $f(a)$ désigne une fonction algébrique *du degré* $m-2$ *ou plus*, a toujours des racines imaginaires. »

Pour la démonstration, le degré de $f(a)$ étant $m-s$, avec $s \geqq 2$, l'auteur multiplie le premier membre de l'équation par $(x-1)^{m-s+1}$; dans la nouvelle équation, les termes de degrés m, $m-1$, ..., $m-s+1$, en nombre $s \geqq 2$, ont des coefficients nuls comme étant leur différence d'ordre $m-s+1$ d'une fonction entière de degré $m-s$.

M. de Virieu indique ensuite une généralisation de la proposition énoncée par Hermite au Concours général de 1842.

M. d'Ocagne. — *Remarque sur la question* 2255 (*voir* la solution, 1917, p. 193). — La solution du 2° peut être complétée par la remarque que *la section par un plan quelconque, parallèle à* D, *est une cissoïde d'une ellipse identique à celle suivant laquelle le plan mené par* D, *parallèlement au plan de section, coupe la surface.*

Pour avoir une cissoïde de cercle, il suffit donc de

couper par un plan parallèle à un des plans de section circulaire menés par D. Ces plans, au nombre de deux, sont ceux, faciles à déterminer, qui (si l'on se reporte aux notations de l'énoncé) correspondent aux points B pour lesquels $CB = CA$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1015.

(1871, p. 96, et 1917, p. 160).

Construire une surface gauche, ayant pour ligne de striction une courbe donnée et pour cône directeur un cône de révolution également donné [1]. G. Fouret.

Solution
Par l'Auteur.

Le cône directeur (S) d'une surface gauche (Σ) est, par définition, le cône lieu des parallèles menées, par un point quelconque s de l'espace, aux génératrices rectilignes de (Σ).

On sait également que le plan central de (Σ), suivant une génératrice Γ, contient la tangente Θ à la ligne de striction Λ de (Σ), à son point de rencontre avec Γ, et est perpendiculaire au plan tangent à (S), le long de la génératrice G de (S) parallèle à Γ.

Si donc la ligne de striction de Λ d'une surface gauche (Σ) et son cône directeur (S) sont donnés, on construira une génératrice quelconque Γ de (Σ) de la manière suivante : par le sommet s du cône (S) on mènera une parallèle T à la tangente Θ de Λ, au point p de cette ligne, par lequel doit

---

[1] Cet énoncé contenait un second paragraphe que nous ne reproduisons pas, l'ayant reconnu inexact, ainsi que nous l'expliquons à la page 222. Cette circonstance a vraisemblablement empêché de donner antérieurement une solution de la première partie de la question, semblable à celle que nous publions ici. G. F.

passer Γ. Par T on mènera un plan normal au cône (S). La génératrice G d'incidence de ce plan normal sera parallèle à la génératrice Γ de (Σ), laquelle, devant passer par p, se trouvera donc déterminée. Il y aura d'ailleurs, en général, un plus ou moins grand nombre de solutions.

Si le cône donné (S) est de révolution, le plan normal (S), mené par T, passera par l'axe de révolution de ce cône et coupera (S) suivant deux droites. Les parallèles à ces droites menées par p seront les génératrices Γ de (Σ), passant par ce point, qui répondent à la question. La surface (Σ) sera, par suite, composée de deux nappes, se coupant suivant la ligne de striction commune Λ.

Autre solution par *Un Abonné*, signalant l'erreur que contient la seconde partie de l'énoncé.

QUESTIONS.

2313 (Énoncé rectifié). — L'équation d'une conique étant $f(x, y, z) = 0$, on pose

$$f_{11} = f(x_1, y_1, z_1),$$
$$f_{12} = \frac{1}{2}[x_2 f'_{x_1} + \ldots + \ldots].$$

Si un polygone de n côtés $M_1 M_2 \ldots$ est circonscrit à la conique, on a

$$f_{11} \times \ldots \times f_{nn} = (-1)^n f_{12} \times \ldots \times f_{n1}.$$

G. Fontené.

2317 (Énoncé rectifié). — Sur la symétrique d'une tangente quelconque à une parabole, par rapport au foyer, il y a trois points P_1, P_2, P_3 dont les distances P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3 à la courbe sont respectivement égales à leurs distances P_1F, P_2F, P_3F au foyer. Démontrer que les points M_1, M_2, M_3, F sont concycliques. R. Goormaghtigh.

2322. On considère les triangles rectangles ABC ayant une hypoténuse commune BC. Des pieds des hauteurs issues des sommets A on mène des parallèles aux côtés AB, AC; démontrer que ces parallèles enveloppent deux hypocycloïdes à trois rebroussements. F. BALITRAND.

2323. Dans le plan d'un triangle, il y a deux points M_1 et M_2 tels que, si α_1, β_1, γ_1 et α_2, β_2, γ_2 désignent leurs projections sur les côtés, les segments $B\alpha_1$, $\alpha_2 C$, $C\beta_1$, $\beta_2 A$, $A\gamma_1$, $\gamma_2 B$ soient égaux entre eux; la droite qui joint le centre de gravité du triangle à l'orthopôle de la droite $M_1 M_2$ passe par le point de Feuerbach. R. GOORMAGHTIGH.

ERRATA.

Page 193, ligne 13 en remontant, *au lieu de* à l'infini sur B', *lire* à l'infini sur D'.

Page 194, ligne 8, *au lieu de* $A\alpha$ en R, *lire* Ax en R.

Page 196, l' « autre solution » de M. Bouvaist s'applique à la question 2257; à la première ligne de cette solution, *au lieu de* IT, *lire* MT.

Page 196, ligne 9, on a omis de signaler une solution de M. H. Brocard à la question 2256, et de mentionner à ce sujet son étude sur le *Trifolium* (*J. de Math. spéc* de G. de Longchamps, 1891, p. 126-129).

Pages 198, 199, les énoncés des questions 2313, 2317, par suite de fautes typographiques, sont peu compréhensibles. Nous les reproduisons, rectifiées, dans le présent numéro.

Page 199, ligne 3, *au lieu de* à la droite AB et, *lire* où la droite AB est.

Page 199, ligne 4, en remontant, *après* d'un point M, *ajouter* variable.

[M¹5d] [M¹6]

SUR UNE MANIÈRE D'ENGENDRER LES CUBIQUES UNICURSALES ET UNE CLASSE DE QUARTIQUES, ET SUR UNE RELATION ENTRE DEUX TRANSFORMATIONS;

Par M. F. Gomes TEIXEIRA.

Nous allons donner une manière nouvelle d'engendrer, au moyen d'une conique donnée, les cubiques unicursales et les quartiques qui ont un point double et deux asymptotes réelles coïncidantes à distance finie, et signaler ensuite une relation entre une transformation géométrique générale que cette construction suggère et la transformation qu'on obtient en généralisant la construction donnée par Descartes de la conchoïde parabolique.

1. Traçons sur un plan une conique (C) et une droite (D), et prenons sur cette droite un point O et sur la conique un point A. Menons par ce point une droite (D_1) de direction arbitraire et représentons par B le second point où elle coupe la conique. Menons enfin par ce point une perpendiculaire à la droite (D) et par O une parallèle à la droite (D_1), et désignons par M le point où ces dernières droites se coupent. Cela posé, nous avons les théorèmes suivants :

1° *Le lieu décrit par* M, *quand la droite* (D_1)

varie, est une cubique unicursale, qui a son point double à O et dont une asymptote est perpendiculaire à la droite (D) *et les autres sont parallèles à celles de la conique.*

2° *Réciproquement, si l'on donne une cubique unicursale ayant son point double à distance finie, on peut déterminer d'une infinité de manières une conique et un point* A *tels que la cubique puisse être construite par la méthode précédente.*

Prenons le point O pour origine des coordonnées orthogonales et la droite (D) pour axe des abscisses; désignons par (α, β) les coordonnées du point A, par (x_1, y_1) celles du point B, par (X, Y) celles du point M et par λ le coefficient angulaire de la droite (D_1); et supposons que la conique soit représentée par l'équation

$$(1) \qquad Hy^2 + Kxy + Lx^2 + My + Nx + P = 0.$$

L'équation de la droite (D_1) est

$$y - \beta = \lambda(x - \alpha),$$

et cette droite coupe la conique au point A et à un autre point dont l'abscisse est déterminée par l'équation

$$(2) \quad \begin{aligned} &(H\lambda^2 + K\lambda + L)x^2 \\ &+ [-2\alpha H\lambda^2 + (2\beta H - K\alpha + M)\lambda + K\beta + N]x \\ &+ \quad H\alpha^2\lambda^2 - \alpha(2H\beta + M)\lambda + H\beta^2 + M\beta + P = 0. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\alpha + x_1 = \frac{2\alpha H\lambda^2 - (2\beta H - K\alpha + M)\lambda - K\beta - N}{H\lambda^2 + K\lambda + L}.$$

Nous avons aussi, par hypothèse,

$$X = x_1, \qquad Y = \lambda X.$$

En éliminant λ et x_1 entre ces trois équations, on obtient celle du lieu décrit par M, savoir :

$$\begin{aligned}(X+\alpha)(HY^2+KXY+LX^2)\\ = 2H\alpha Y^2+(K\alpha-2H\beta-M)XY-(K\beta+N)X^2,\end{aligned}$$

laquelle représente une cubique unicursale ayant le point double à l'origine O et ayant une asymptote perpendiculaire à l'axe des abscisses (D) et les deux autres parallèles aux asymptotes de la conique.

Considérons maintenant la question réciproque.

Supposons qu'on donne une cubique unicursale ayant le point double à distance finie et rapportons cette cubique à un système de coordonnées orthogonales ayant pour origine le point double et pour axe des ordonnées la parallèle à une asymptote. L'équation de la cubique prend la forme

$$X(H_1Y^2+K_1XY+L_1X^2) = M_1X^2+N_1XY+P_1Y^2.$$

Les conditions pour que la cubique que cette équation représente soit identique à celle que représente l'équation précédente sont :

$$\frac{K_1}{H_1}=\frac{K}{H}, \qquad \frac{L_1}{H_1}=\frac{L}{H}, \qquad \frac{M_1}{H_1}=-\frac{K_1}{H_1}\beta-\frac{N}{H}-\frac{L_1}{H_1}\alpha,$$

$$\frac{N_1}{H_1}=-2\beta-\frac{M}{H}, \qquad \frac{P_1}{H_1}=\alpha.$$

Les deux premières équations déterminent $\frac{K}{H}$ et $\frac{L}{H}$. Les autres et l'équation

$$H\beta^2+K\alpha\beta+L\alpha^2+M\beta+N\alpha+P=0$$

ou

$$H\left(\beta^2+\frac{K_1}{H_1}\alpha\beta+\frac{L_1}{H_1}\alpha^2\right)+M\beta+N\alpha+P=0,$$

laquelle exprime que le point (α, β) est situé sur la conique, déterminent α et trois des quantités β, $\frac{M}{H}$, $\frac{N}{H}$, $\frac{P}{H}$, quand une est donnée arbitrairement.

On peut, en particulier, faire $M = 0$, et construire ainsi la cubique au moyen d'une conique symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Cette manière de construire les cubiques unicursales est la généralisation d'une méthode employée par Cramer dans l'*Introduction à l'Analyse des lignes courbes* (1750, p. 441) pour construire la courbe connue à présent sous le nom de *conchoïde de Sluse*.

2. Si la conique considérée se réduit à un cercle représenté par l'équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

la courbe engendrée par la méthode donnée au numéro précédent est une *cubique circulaire unicursale* représentée par l'équation

$$X(X^2+Y^2)=(2a-\alpha)X^2+2(b-\beta)XY+\alpha Y^2.$$

Réciproquement, si l'on donne la cubique circulaire représentée par l'équation

$$X(X^2+Y^2)=M_1X^2+N_1XY+P_1Y^2,$$

on a, pour déterminer le cercle et le point (α, β) qui figurent dans la construction considérée, les équations

$$2a-\alpha=M_1, \qquad 2(b-\beta)=N_1, \qquad \alpha=P_1,$$
$$(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2=R^2.$$

3. Supposons maintenant que le point A ne soit pas

situé sur la conique donnée. Dans ce cas, l'équation (2) donne, en posant $x = X$, $\lambda = \frac{Y}{X}$,

$$\begin{aligned} &X^2[HY^2 + KXY + LX^2] \\ &\quad + X[(K\beta + N)X^2 + (2\beta H - K\alpha + M)XY - 2H\,2\,Y^2] \\ &\quad + H\alpha^2 Y^2 - \alpha(2H\beta + M)XY + (H\beta^2 + M\beta + P)X^2 = 0. \end{aligned}$$

La courbe engendrée par M, quand la droite (D_1) varie, est donc alors une quartique ayant un point double à l'origine des coordonnées, deux asymptotes coïncidantes parallèles à l'axe des ordonnées, dont l'équation est $X = \alpha$, et deux autres parallèles à celles de la conique donnée.

Réciproquement, si l'on donne une quartique ayant deux asymptotes réelles coïncidantes situées à distance finie et un point double situé aussi à distance finie, nous pouvons prendre pour axe des ordonnées une parallèle à ces asymptotes et le point double pour origine des coordonnées, et l'équation de la courbe prend la forme

$$\begin{aligned} &X^2(H_1 Y^2 + K_1 XY + L_1 X^2) \\ &\quad + X(M_1 X^2 + N_1 XY + P_1 Y^2) \\ &\quad + \quad Q_1 X^2 + R_1 XY + T_1 Y^2 = 0. \end{aligned}$$

Les conditions pour que cette équation soit identique à celle qui précède sont :

$$\frac{K_1}{H_1} = \frac{K}{H}, \qquad \frac{L_1}{H_1} = \frac{L}{H}, \qquad \frac{M_1}{H_1} = \frac{K_1}{H_1}\beta + \frac{N}{H},$$

$$\frac{N_1}{H_1} = 2\beta + \frac{M}{H} - \frac{K_1}{H_1}\alpha,$$

$$\frac{P_1}{H_1} = -2\alpha, \qquad \frac{Q_1}{H_1} = \beta^2 + \frac{M}{H}\beta + \frac{P}{H},$$

$$\frac{R_1}{H_1} = -2\alpha\beta + \frac{M}{H}\alpha, \qquad \frac{T_1}{H_1} = \alpha^2.$$

Ces équations donnent d'abord

(A) $$P_1^2 = 4H_1T_1.$$

Quand cette condition est satisfaite, les deux premières équations déterminent $\frac{K}{H}$ et $\frac{L}{H}$; les autres déterminent α, β, $\frac{M}{H}$, $\frac{N}{H}$, $\frac{P}{H}$.

La condition (A) est celle qui exprime que la quartique donnée a deux asymptotes coïncidantes parallèles à l'axe des ordonnées.

De tout ce qui précède résultent les théorèmes suivants :

1° *Le lieu décrit par* M, *quand la droite* (D_1) *varie, est une quartique ayant un point double à* O *et deux asymptotes coïncidantes perpendiculaires à la droite* (D).

2° *Réciproquement, si l'on donne une quartique ayant un point double et deux asymptotes coïncidantes à distance finie, on peut déterminer une conique telle que la quartique puisse être construite par la méthode exposée ci-dessus.*

4. En généralisant la doctrine précédente, on obtient une transformation de courbes qu'on va voir.

Considérons une courbe (C) représentée par l'équation $y = \lambda(x)$ et prenons sur son plan un point A ayant pour coordonnées (α, β), et un point O, origine des coordonnées. Par le point A, menons une droite (D_1) de direction arbitraire et représentons par (x, y) les coordonnées d'un point B où elle coupe la courbe donnée. Par ce dernier point, menons une perpendiculaire à l'axe des abscisses et par le point O une parallèle à la droite (D_1). Ces deux droites se

coupent en un point (X, Y) qui décrit, quand la direction de la droite (D_1) varie, une courbe (C_1) dont les points sont déterminés par les équations

$$X = x, \qquad Y = \lambda X = \frac{y - \beta}{x - \alpha} x.$$

Ces équations donnent

$$x = X, \qquad y = \beta + Y - \alpha \frac{Y}{X},$$

et par conséquent l'équation de la transformée (C_1) de la courbe donnée (C) est

$$(3) \qquad \beta + Y - \alpha \frac{X}{Y} = f(X).$$

Si le point (α, β) coïncide avec un point de la courbe donnée, cette équation doit se dédoubler en celle d'une droite et celle de la courbe cherchée.

5. On peut rattacher à la transformation qu'on vient de considérer une autre qu'on va définir.

Considérons une courbe qui se déplace sur un plan de manière que ses points décrivent des droites parallèles et considérons sur ce plan un point H invariablement lié à la courbe. Prenons sur le même plan un point fixe K et par ce point traçons la droite KH. Cette droite coupe la courbe considérée en des points M_1, $M_2, \ldots$ qui décrivent, quand la courbe se déplace, une nouvelle ligne dont on peut obtenir l'équation de la manière suivante.

Prenons pour origine des coordonnées orthogonales le point fixe K et pour axe des ordonnées une parallèle à la droite décrite par un point de la courbe mobile, et supposons que l'équation de la courbe donnée correspondant à sa position initiale soit $y = f(x)$, et que

les coordonnées du point H correspondant à cette position de la courbe soient (α_1, β_1).

Quand ce point prend la position définie par les coordonnées $(\alpha_1, \beta_1 + k)$, la courbe prend la position correspondant à l'équation

$$y - k = f(x).$$

L'équation de la droite HK est

$$\alpha_1 y = (\beta_1 + k)x.$$

Cette droite coupe la courbe en des points déterminés par les deux dernières équations, et l'on obtient l'équation du lieu de ces points en éliminant k entre ces équations, ce qui donne

$$(4) \qquad y - \beta_1 - \alpha\frac{y}{x} = f(x).$$

La transformation qu'on vient de considérer est identique à celle que Descartes a employée dans sa *Géométrie* pour construire au moyen de la parabole sa *conchoïde parabolique*.

Les équations (3) et (4) sont identiques quand on prend $\alpha = \alpha_1$, $\beta = -\beta_1$. Donc, *si l'on applique à une courbe donnée la transformation de Descartes et celle qu'on a considérée au n° 4, on obtient une même courbe, quand on choisit convenablement les points et les droites qui figurent dans ces transformations.*

6. On connaît diverses manières de tracer le *folium de Descartes*, dont nous avons exposé quelques-unes dans notre *Traité des courbes spéciales* (t. I, p. 85-91). Nous allons en ajouter une autre bien facile, qui résulte de la doctrine exposée au n° 1.

En appliquant cette doctrine à l'équation de cette courbe :

$$\sqrt{2}\,(3\,Y^2 + X^2)\,X = 3\,a\,(X^2 - Y^2),$$

on trouve, en faisant $H = 1$, $M = 0$,

$$\alpha = -\frac{1}{2}\,a\,\sqrt{2}, \qquad \beta = 0, \qquad L = \frac{1}{3},$$

$$N = -\frac{1}{3}\,a\,\sqrt{2}, \qquad K = 0.$$

Donc le folium de Descartes peut être tracé par la méthode considérée au n° 1 en employant la conique définie par l'équation

$$6y^2 + 2x^2 - 2a\sqrt{2}x - 3a^2 = 0,$$

et nous avons pour cela la règle suivante :

Traçons l'ellipse qui a pour centre le point $\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}, 0\right)$, et dont les axes sont égaux à $2a\sqrt{2}$ et $2a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Par le sommet de cette ellipse qui a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}a\sqrt{2}, 0\right)$, menons une droite de direction arbitraire (D_1) et, par le second point où cette droite coupe l'ellipse, traçons une perpendiculaire à l'axe des abscisses. Cette dernière droite coupe la parallèle à (D_1) menée par l'origine des coordonnées en un point M du folium.

[K[1]11]

FAISCEAUX DE CERCLES RELATIFS A LA PUISSANCE D'UNE DROITE;

Par M. L. CRELIER.

Dans un même plan nous pouvons considérer quatre espèces de faisceaux de cercles :

1° Les faisceaux F_1 formés par l'ensemble des cercles admettant les deux mêmes points de coupe réels;

2° Les faisceaux F_2 formés par tous les cercles qui ne se coupent pas, mais qui possèdent les deux mêmes points fondamentaux;

3° Les faisceaux F_3 formés par l'ensemble des cercles possédant les deux mêmes tangentes extérieures communes. En d'autres termes, tous les cercles d'un faisceau F_3 admettent le même premier centre de similitude extérieur;

4° Les faisceaux F_4 formés par l'ensemble des cercles admettant le même premier centre de similitude intérieur.

Les faisceaux F_1 et F_2 sont bien connus dans la théorie de la puissance d'un point par rapport à un cercle. Les autres, moins connus, se rattachent à la théorie de dualistique de la puissance d'une droite par rapport à un cercle. Ils donnent lieu aux quelques propriétés suivantes :

1° *Toute droite passant par le premier centre de*

similitude ou par le CENTRE RADICAL *principal a la même puissance relative par rapport à tous les cercles du faisceau;*

2° *Les tangentes par tous les points de coupe homologues des cercles d'un faisceau avec une même droite passant par le centre radical sont parallèles entre elles.*

En effet, les angles des tangentes avec la droite correspondent à sa puissance; ils sont donc égaux et les tangentes sont parallèles.

3° *Les points de coupe des deux tangentes de chaque cercle du faisceau par ses intersections avec une droite passant par le centre radical sont tous sur un même rayon. Celui-ci passe également par le centre radical et il est la polaire conjuguée de la droite précédente par rapport à tous les cercles du faisceau.*

Soient C_1 et C_2 deux cercles du faisceau F_3 ou F_4 dont le centre radical est S (*fig.* 1 et 2). Nous considérons la droite AB passant par S; elle coupe C_1 en A et A', puis C_2 en B et B'. Les tangentes en A et A' se coupent en M_1, celles par B et B' se coupent en M_2. Les triangles O_2AM_1 et O_2BM_2 sont homothétiques; donc M_1M_2 passe par le point de coupe S de O_1O_2 et AB. D'autre part, M_1 est le pôle de AB par rapport à C_2 et SM_1 la polaire conjuguée de AB par S et par rapport au même cercle. La même remarque est valable pour tous les cercles du faisceau.

Cette droite SM_1M_2 est ainsi le rayon conjugué de AB dans l'involution des polaires conjuguées en S. La ligne des centres est le premier axe et, dans le faisceau F_3, les tangentes extérieures communes sont les rayons doubles.

4° *Étant donnés deux faisceaux* $F_2^{(1)}$ et $F_3^{(2)}$ *de même centre radical principal* S, *les points de coupe des tangentes extérieures communes de deux cercles quelconques des faisceaux, pris l'un dans* $F_3^{(1)}$ *et l'autre dans* $F_3^{(2)}$, *sont tous sur une même droite appelée* L'AXE RADICAL PRINCIPAL DES DEUX FAISCEAUX.

Les points de coupe des tangentes intérieures communes des mêmes cercles sont tous sur une autre droite appelée L'AXE RADICAL SECONDAIRE DES DEUX FAISCEAUX.

Soient C_1 un cercle de $F_3^{(1)}$ et C_2' un cercle de $F_3^{(2)}$. Leurs tangentes extérieures communes se coupent en C. La droite $SC = a_1$ est de mêmes puissances relatives par rapport à tous les cercles de $F_3^{(1)}$ et par rapport à tous ceux de $F_3^{(2)}$. Elle est encore de mêmes puissances relatives par rapport à C_1 et C_4'. Les puissances relatives par rapport aux cercles de $F_3^{(1)}$ sont ainsi les mêmes que celles par rapport aux cercles de $F_3^{(2)}$, puisqu'elles sont déterminées par les cercles C_1 et C_2'.

La droite SC est donc de mêmes puissances relatives par rapport à deux cercles quelconques pris, l'un dans $F_3^{(1)}$ et l'autre dans $F_3^{(2)}$. Elle passe par les centres radicaux principaux correspondants; autrement dit, les points de coupe des tangentes extérieures communes à deux cercles pris comme nous venons de le dire sont tous sur SC.

Si nous admettons que les tangentes intérieures de C_1 et de C_2' se coupent en D et si nous désignons la droite SD par a_2, cette droite sera de mêmes puissances relatives pour tous les cercles de $F_3^{(1)}$ et de mêmes puissances relatives pour tous ceux de $F_3^{(2)}$. Elle sera en outre de puissances relatives inverses pour C_1 et C_2'. Il en résulte que la puissance relative pour les

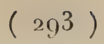


Fig. 1.

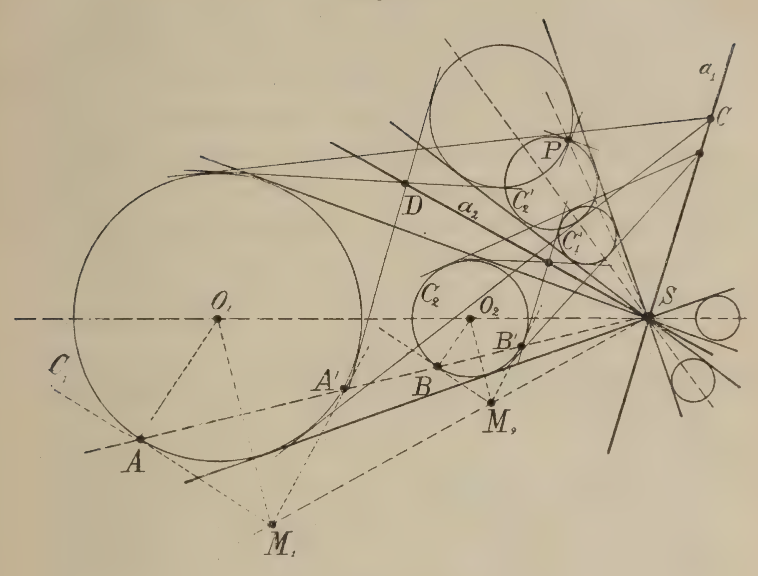
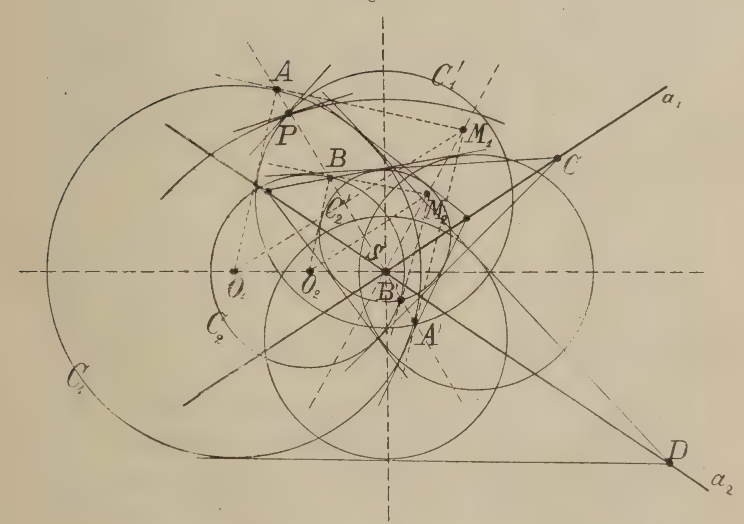

a₁
C
P
D
a₂
C'₂
C'₁
C₂
O₁
O₂
S
B'
A'
B
C₁
A
M₂
M₁

Fig. 2.


A
C'₁
a₁
P
M₁
B
C
C'₂
M₂
S
O₁
O₂
B'
A'
C₂
C₁
D
a₂

cercles de $F_3^{(1)}$ est l'inverse de la puissance relative pour ceux de $F_3^{(2)}$. Autrement dit, la droite a_2 passera par les centres radicaux secondaires de deux cercles quelconques pris, l'un dans $F_3^{(1)}$ et l'autre dans $F_3^{(2)}$. La droite a est donc le lieu des points de coupe des tangentes intérieures communes des cercles considérés deux à deux comme plus haut.

a_1 devient l'*axe radical principal* des deux faisceaux $F_3^{(1)}$ et $F_3^{(2)}$ et a_2 l'*axe radical secondaire*. Si nous désignons par $F_3^{(1)}$ et $F_3^{(2)}$ les faisceaux compris dans les angles opposés des précédents, a_1 est également l'axe radical principal pour $F_3^{(1)}$ et $F_3^{(2)}$ et l'axe radical secondaire pour $F_3^{(1)}$ et $F_3^{(2)}$. Il en est d'une manière analogue pour a_2.

5° *Étant donnés deux faisceaux* $F_4^{(1)}$ *et* $F_4^{(2)}$, *les points de coupe des tangentes extérieures communes à deux cercles pris, l'un dans* $F_4^{(1)}$ *et l'autre dans* $F_4^{(3)}$, *sont tous sur une même droite,* L'AXE RADICAL PRINCIPAL DES DEUX FAISCEAUX.

Les points de coupe des tangentes extérieures communes à deux autres cercles pris, l'un dans $F_4^{(1)}$ *et le second dans* $F_4^{(2)}$ *ou l'un dans* $F_4^{(1)}$ *et l'autre dans* $F_4^{(2)}$, *sont également tous sur une même droite,* L'AXE RADICAL SECONDAIRE DES DEUX FAISCEAUX.

Le raisonnement est identique au précédent.

L'application de la théorie de la puissance d'une droite par rapport à un cercle aux involutions de rayons donne lieu au théorème suivant :

THÉORÈME. — *A tout point* P *du plan d'un faisceau* F_3 *ou* F_4 *de centre radical* S *correspond une involution de rayons. Les rayons conjugués sont les bissectrices des angles compris entre l'axe* PS *et*

la première tangente menée de P à chaque cercle du faisceau, puis entre PS et le prolongement de la deuxième tangente menée de P au même cercle.

Les rayons doubles sont toujours réels dans le plan d'un faisceau F_4 *et dans l'angle intérieur du plan d'un faisceau* F_3. *Dans son angle extérieur, ils sont imaginaires.*

Les rayons doubles réels sont les bissectrices des angles compris entre l'axe et les tangentes des deux cercles du faisceau F_3 *ou* F_4 *et son complément* F'_4, *passant par le point considéré.*

Nous considérerons maintenant un point P du plan d'un faisceau F_3 ou F_4 complété par le faisceau conjugué F'_3 ou F'_4 et de centre radical principal S. Par ce point, nous mènerons deux tangentes à chaque cercle du faisceau. Soient t_1 et t_2 les deux tangentes à l'un quelconque des cercles.

La puissance absolue de la droite PS sera la même par rapport à tous les cercles du faisceau, F_3 par exemple et la même par rapport à tous les cercles du faisceau complémentaire F'_3.

Si nous posons

$$\text{angle}\,(t_1 a) = \alpha, \qquad a = \text{PS},$$
$$\text{angle}\,(t_2 a) = \alpha',$$

nous aurons

$$\text{Puissance de PS} = \text{tang}\,\frac{\alpha}{2}\,\text{tang}\,\frac{\alpha'_s}{2}.$$

Avec les deux tangentes d'un autre quelconque des cercles du faisceau, nous aurons également :

$$\text{Puissance de PS} = \text{tang}\,\frac{\alpha}{2}\,\text{tang}\,\frac{\alpha'_s}{2} = \text{tang}\,\frac{\beta}{2}\,\text{tang}\,\frac{\beta'_s}{2} = \ldots = \text{const.}$$

Les bissectrices des angles compris entre PS et t_1

ou PS et le prolongement de t_2 donnent lieu à un produit de tangentes trigonométriques constant; donc ces bissectrices forment une involution d'axe principal PS.

Il reste cependant quelques observations à faire :

1° Chaque tangente t_1 est commune à deux cercles du faisceau, F_3 par exemple, ou à un cercle de F_3 et à un de F'_3, suivant l'angle dans lequel elle se trouve.

Dans le premier cas, t_1 est la première tangente pour un cercle et la deuxième pour l'autre, puisqu'elle sépare les deux cercles. La première fois, il s'agira de la bissectrice de l'angle entre PS et cette tangente. La seconde fois, il s'agira de la bissectrice du supplément du même angle pris en sens contraire.

Dans le second cas, la tangente t_2, par exemple, est chaque fois, deuxième tangente. Pour le cercle de F_3 nous aurons la bissectrice de l'angle entre PS et le prolongement de t_2, tandis que pour le cercle de F'_3 ce sera la bissectrice de l'angle entre PS et t_2 elle-même.

Dans chaque cas, toute bissectrice est univoquement liée à sa conjuguée et celle relative au second cercle forme un rayon perpendiculaire au précédent, mais sans être conjugué avec lui.

Le raisonnement est identique pour F_4 et F'_4.

2° Nous avons dit que PS, à cause de la puissance, était l'axe principal de l'involution. Nous pouvons encore remarquer que PS correspond aux tangentes confondues du cercle limite du faisceau. La première bissectrice est donc PS et la seconde lui est perpendiculaire. Elle donne le deuxième axe.

3° Il reste à examiner les rayons doubles possibles des involutions. Nous aurons deux cas principaux, un

avec les faisceaux F_3 et l'autre avec les faisceaux F_4.

Avec les faisceaux F_3, deux alternatives sont encore possibles, suivant que P est dans l'angle même du faisceau, ou qu'il est dans son supplément.

Dans la première alternative, la puissance de PS sera positive; c'est également celle de l'involution et nous aurons deux rayons doubles possibles. Ces rayons seront les bissectrices des angles entre PS et les tangentes des deux cercles du faisceau qui passent par P.

Si P est dans l'angle supplémentaire du faisceau, il n'y a pas de cercles par P, donc pas de tangentes et pas de rayons doubles. D'autre part, la puissance est négative, ce qui exclut déjà la possibilité des rayons doubles.

Dans le deuxième cas, avec un faisceau F_4, la puissance de PS est constamment positive. Il y a donc toujours deux rayons doubles réels. Nous savons en outre, par la planimétrie, que nous avons toujours un cercle de F_4 par P et un de F'_4. Comme précédemment, les tangentes de ces cercles entraînent les rayons doubles.

[K¹ 9a]

SUR L'ORIENTATION D'UN GROUPE DE DROITES;

PAR F. GONSETH,

Docteur ès sciences,

Assistant à l'École Polytechnique fédérale de Zurich.

---

1. Dans un précédent article [1], j'ai démontré les énoncés suivants :

Les groupes de n droites d'un faisceau qui ont

---

[1] *Quelques propriétés métriques*, etc. (**1917**, p. 125).

une même orientation forment un système linéaire dont la paire isotrope du faisceau est une paire neutre; ou encore :

Ce système linéaire est formé des groupes apolaires à un groupe régulier fondamental de n droites. L'orientation de tout groupe du système par rapport à chaque droite du groupe fondamental est nulle.

Un groupe régulier est, d'autre part, apolaire à la paire isotrope.

Remarquons que ces propriétés sont de nature *projective.*

Elles peuvent être appliquées à l'étude des courbes algébriques qui ont mêmes foyers. La méthode offrira l'avantage de généraliser fort simplement le procédé projectif qui est classique dans le cas particulier des coniques confocales.

2. *a.* Deux courbes algébriques de $n^{\text{ième}}$ classe, Γ_n et Γ_n^1, sont *confocales* lorsque toute droite isotrope qui touche l'une touche aussi l'autre. Par conséquent :

L'ensemble des confocales à Γ_n forme un système linéaire tangentiel auquel on parvient en construisant le système linéaire de moindre dimension qui comprend Γ_n et toutes les courbes de $n^{\text{ième}}$ classe formées de l'ombilicale (conique dégénérée) et d'une courbe arbitraire de $(n-2)^{\text{ième}}$ classe. Ce système a la dimension $N(n-2)+1$.

Supposons que d'un point P arbitraire on ait mené les groupes de tangentes à Γ_n et à ses confocales. Ces groupes forment naturellement un système linéaire,

dont la dimension ne surpasse pas $n - 1$; il existe en effet $\infty^{N(n-3)}$ confocales à Γ_n qui sont formées d'une courbe de $(n-3)^{\text{ième}}$ classe, de la paire ombilicale et du point P; toute droite tangente à une confocale Ω (différente des précédentes) l'est également à toutes les confocales du système linéaire construit sur Ω et les précédentes; enfin

$$N(n-2)+1-N(n-3)-1=n-1.$$

D'autre part tout groupe comprenant la paire isotrope est un groupe de tangentes; donc *les groupes de tangentes menées de* P *à toutes les confocales à* Γ_n *forment un système linéaire dans lequel la paire isotrope est neutre*. D'après les résultats rappelés au nº 1 *ces groupes ont même orientation*.

Tout groupe indépendant de foyers est une confocale réduite à n points. Si nous supposons que Γ_n est une courbe réelle, un de ces groupes est formé de n points réels, et l'on obtient l'énoncé de Laguerre.

Tout groupe de tangentes menées de P *à* Γ_n *ou à ses confocales a la même orientation que le groupe des droites allant aux* n *foyers réels de* Γ_n.

b. La considération du groupe régulier fondamental mène à un second énoncé qui généralise, comme le précédent, une propriété bien connue des coniques confocales.

Cherchons, parmi les confocales qui passent par P, celles qui peuvent y admettre une tangente stationnaire. Il faut pour cela qu'un certain nombre des tangentes d'un groupe viennent à coïncider. Or, chaque droite du groupe fondamental doit être considérée comme un groupe de n droites confondues, et aucune autre droite ne jouit de cette propriété. Donc :

Les seules n droites du groupe régulier fondamental ont en P *un contact du* $(n-1)^{\text{ième}}$ *ordre avec une et par conséquent avec* $\infty^{N(n-3)+1}$ *confocales à* Γ_n.

c. Soient Γ_1 et Γ_2 deux courbes de $n^{\text{ième}}$ classe, et Γ_3 une courbe de leur faisceau tangentiel; soit enfin P un foyer de cette dernière. *Les groupes de tangentes menées de* P *à* Γ_1 *et à* Γ_2 (*et par conséquent à toutes les courbes du faisceau tangentiel de ces dernières*) *ont même orientation* (¹).

Les groupes de tangentes menées de P aux courbes du faisceau tangentiel qui contient Γ_1, Γ_2 et Γ_3 forment une involution qui est déterminée par deux groupes, par exemple par celui des tangentes à Γ_1 (qui est arbitraire) et celui des tangentes à Γ_3 (qui contient la paire isotrope de P). Cette involution est donc comprise dans le système linéaire contenant le premier groupe et tous les groupes formés de la paire isotrope et de $n-2$ droites arbitraires, ce qui démontre l'énoncé.

d. Fixons une direction, *d*, et cherchons les points P tels que le groupe des tangentes menées de P à Γ_n ait, par rapport à *d*, une orientation *nulle*. Pour tout point du plan il existe un groupe régulier de *n* droites, dont une droite composante est parallèle à *d*. Soient $M_1, \ldots, M_n$, les points à l'infini des droites de ce groupe. Les points P doivent être tels que les tangentes menées à Γ_n et les tangentes menées à la courbe formée des *n* points M_i forment deux groupes apolaires. Or, en général, l'énoncé suivant est vrai :

(¹) G. Humbert, *Nouvelles Annales*, 1893.

Les points d'où les tangentes menées à deux courbes de $n^{\text{ième}}$ classe forment deux groupes apolaires, sont sur une courbe C_n de $n^{\text{ième}}$ ordre.

Dans notre cas particulier C_n passe par les points M_i; ses directions asymptotiques forment un groupe régulier.

Lorsque d tourne autour d'un point, les courbes C_n décrivent un faisceau ponctuel, car pour tout point commun à deux d'entre elles, l'orientation du groupe des tangentes à Γ_n est la même par rapport à deux directions différentes, et par conséquent indéterminée pour toute direction. *Ces points d'intersections sont les n^2 foyers de Γ_n.*

Le faisceau des courbes de $n^{\text{ième}}$ ordre qui passent par les n^2 foyers de Γ_n est donc très remarquable. *L'orientation du groupe des tangentes menées des points de l'une quelconque d'entre elles à Γ_n est constante; leurs directions asymptotiques forment une involution absolue.*

3. Dans l'espace, *deux groupes de n plans* d'un faisceau d'axe d ont même orientation lorsque les groupes de droites, qu'on obtient en les coupant par un plan π perpendiculaire à d, ont eux-mêmes une même orientation; un groupe de plans est régulier en même temps que le groupe de ses droites d'intersection par π. Le faisceau d'axe d contient deux plans isotropes qui coupent π suivant deux droites isotropes (parce que π est perpendiculaire à d); en outre deux groupes de plans sont apolaires en même temps que les groupes de droites qu'on obtient en les coupant par un plan arbitraire, par π spécialement. Il en résulte que les énoncés du n° 1 sont équivalents aux suivants :

Un groupe régulier de plans (d'un même faisceau) est apolaire à l'ombilicale.

Les groupes de plans (d'un faisceau) qui ont même orientation forment un système linéaire dans lequel la paire de plans isotropes du faisceau est une paire neutre.

Ce système linéaire est formé des groupes apolaires à un groupe régulier.

4. *a.* Les cônes confocaux à un cône de $n^{\text{ième}}$ classe Γ_n s'obtiennent en formant le système linéaire tangentiel de moindre dimension qui comprend Γ_n et tous les cônes (de même sommet) composés du cône isotrope et d'un cône arbitraire de $(n-2)^{\text{ième}}$ classe. Les n axes focaux d'un cône *réel* forment, en particulier, un cône confocal de ce dernier, dégénéré en n droites.

Un raisonnement identique à celui du n° 2 conduit directement aux énoncés suivants :

Le groupe des plans tangents menés d'une droite à un cône réel Γ_n de $n^{\text{ième}}$ classe a la même orientation que le groupe des n plans joignant cette droite aux n axes focaux de Γ_n (Laguerre).

Dans tout faisceau d'axe d, il y a n plans qui ont le long de d un contact du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre avec un et par conséquent avec $\infty^{N(n-3)+1}$ cônes confocaux à Γ_n. Ce groupe de n plans est régulier.

b. Les cônes confocaux à un cône C_n du $n^{\text{ième}}$ ordre forment le système linéaire de dimension minimale qui comprend C_n et les cônes de $n^{\text{ième}}$ ordre (de même sommet) formés du cône isotrope et d'un cône arbitraire de $(n-2)^{\text{ième}}$ ordre. Les n plans focaux d'un cône réel, en particulier, forment un cône confocal

réduit à n plans. D'où l'on déduit, comme plus haut :

Le groupe des n droites d'intersection, d'un cône C_n réel, de $n^{\text{ième}}$ ordre, par un plan passant par le sommet de celui-ci, a la même orientation que le groupe des droites d'intersection des n plans focaux de C_n (Laguerre).

Dans tout faisceau de droites, dont le centre est au sommet de C_n, il se trouve n droites le long desquelles le plan tangent à un, et par conséquent à $\infty^{N(n-3)+1}$ cônes confocaux à C_n a un contact du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre. Ce groupe de n droites est régulier.

5. Par la même méthode, c'est-à-dire *par des considérations purement projectives, et en n'introduisant qu'au dernier moment les conditions de réalité*, on pourrait démontrer, en même temps que d'autres semblables, l'énoncé général suivant, dû encore à Laguerre :

Le groupe des mn tangentes communes à deux courbes algébriques, Γ_n de $n^{\text{ième}}$ classe et Γ_m de $m^{\text{ième}}$ classe, a la même orientation que le groupe des mn droites qui joignent tous les foyers réels de Γ_n à tous les foyers réels de Γ_m.

Il suffirait de se baser sur le lemne projectif suivant, dont la démonstration n'offre aucune difficulté spéciale :

Les groupes de mn points d'intersection, avec une droite arbitraire, des groupes de mn tangentes communes à une courbe de $m^{\text{ième}}$ classe, et aux courbes de $n^{\text{ième}}$ classe d'un faisceau tangentiel

sont dans un système linéaire de groupes dont la dimension ne surpasse pas m.

Mais je me bornerai à appliquer la méthode à l'énoncé suivant qui se trouve dans l'article déjà cité de M. G. Humbert :

Des groupes de n droites étant compris dans une série algébrique à un ou plusieurs paramètres, il faut et il suffit, pour qu'ils aient même orientation, que lorsque p droites d'un groupe de la série passent par un point cyclique, un nombre égal de droites de ce groupe viennent à passer par l'autre point cyclique.

Au lieu des groupes de droites, il suffit d'en considérer les points à l'infini. Supposons donc qu'une série de groupes de n points, sur la droite de l'infini, possède la propriété distinctive énoncée ci-dessus. Le système linéaire, de dimension minimale, qui la contient, possède la même propriété, et ne peut donc avoir la dimension maximale, n. Si, d'autre part, sa dimension est inférieure à $n-1$, je le complète par des groupes réels, successifs, jusqu'à ce que sa dimension soit exactement $n-1$.

Et maintenant je puis fixer arbitrairement $n-1$ points d'un groupe, pour déterminer ce dernier; je choisis $n-2$ points au hasard, et un cyclique; par hypothèse l'autre cyclique doit aussi faire partie du groupe; *la paire ombilicale est donc neutre.*

Les groupes de droites en question ont bien même orientation.

La réciproque ne paraît pas laisser concourir des éléments imaginaires quelconques.

[19c]

TOUT NOMBRE PREMIER DE LA FORME $4n+1$ EST UNE SOMME DE DEUX CARRÉS;

PAR M. M. CHALAUX,
Capitaine d'Artillerie.

1. On démontre souvent cette proposition célèbre en établissant tout d'abord le théorème suivant :

Tout diviseur d'une somme de deux carrés premiers entre eux est lui-même une somme de deux carrés.

Je vais montrer qu'il suffit de s'appuyer sur le lemme plus particulier que voici, dont la démonstration est plus simple :

Si un nombre premier, somme de deux carrés, divise une somme de deux carrés premiers entre eux, le quotient est lui-même une somme de deux carrés premiers entre eux.

Soient en effet $p = a^2 + b^2$ le nombre premier considéré, $A^2 + B^2$ la somme de deux carrés premiers entre eux qu'il divise, m le quotient

$$(1) \qquad pm = (a^2 + b^2)m = A^2 + B^2,$$

a et b étant évidemment premiers entre eux, l'équation indéterminée

$$ax + by = A$$

admet une infinité de solutions en nombres entiers

données par les formules

$$(2) \qquad x = x_0 + b\lambda,$$
$$(3) \qquad y = y_0 - a\lambda,$$

le couple (x_0, y_0) constituant une solution particulière, λ étant un entier arbitraire.

Posons

$$bx_0 - ay_0 = C_0,$$
$$(4) \qquad bx - ay = C = C_0 + (a^2 + b^2)\lambda.$$

On a les identités

$$(5) \qquad (a^2 + b^2)(x_0^2 + y_0^2) = A^2 + C_0^2,$$
$$(6) \qquad (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = A^2 + C^2.$$

On tire de (1) et (5)

$$B^2 - C_0^2 = (B - C_0)(B + C_0) \equiv 0 \qquad [\text{mod}\,(a^2 + b^2)];$$

$a^2 + b^2 = p$ étant premier divise donc au moins l'un des nombres $B - C_0$, $B + C_0$. Comme, dans l'égalité (1), B n'intervient que par son carré, on peut supposer que c'est $B - C_0$. Soit alors

$$B - C_0 = (a^2 + b^2)\mu,$$

μ étant entier. Si l'on fait dans les formules (2) et (3)

$$\lambda = \mu,$$

il vient, d'après (4),

$$C = B,$$

et, d'après (6),

$$\frac{A^2 + B^2}{a^2 + b^2} = x^2 + y^2.$$

D'autre part, x et y sont premiers entre eux, car un diviseur commun de ces nombres *diviserait* aussi A

et B, en vertu des égalités

$$ax + by = A, \qquad bx - ay = B,$$

et A et B sont supposés premiers entre eux. Le lemme est donc complètement établi.

2. Cela posé, le théorème sur les nombres premiers de la forme $4n + 1$ s'établit aisément, par une méthode de récurrence.

Tout d'abord, il résulte des éléments de la théorie des résidus quadratiques que tout nombre premier $4n + 1$ divise une somme de deux carrés premiers entre eux, et qu'au contraire un nombre premier $4n + 3$ ne divise jamais une pareille somme (cela revient à dire que -1 est résidu quadratique des nombres de la première forme, et non-résidu de ceux de la seconde).

Soit alors p un nombre premier $4n + 1$.

Supposons le théorème reconnu exact pour tous les nombres premiers de cette même forme, inférieurs à p. Je dis qu'il est vrai pour p.

En effet, p divise une somme de deux carrés premiers entre eux $A^2 + B^2$. On peut supposer

$$A < \frac{p}{2}, \qquad B < \frac{p}{2},$$

sans quoi l'on remplacerait A et B par leurs résidus (mod p), de valeur absolue minimum. Posons

$$pm = A^2 + B^2.$$

On a

$$m = \frac{A^2 + B^2}{p} < \frac{p}{2}.$$

m divisant une somme de deux carrés premiers entre eux ne peut avoir comme facteurs premiers que 2 [1] et des nombres de la forme $4n+1$, naturellement tous plus petits que p. Soit p' un de ces derniers. Posons

$$m = m'p',$$

d'où

$$pm'p' = A^2 + B^2.$$

Le nombre premier p' est, par hypothèse, somme de deux carrés. Par conséquent, et par application du lemme du n° 1, pm' est somme de deux carrés premiers entre eux.

Si m' contient encore un ou plusieurs facteurs premiers $4n+1$, on continuera de même et l'on parviendra finalement à ce résultat que p ou $2p$ est une somme de deux carrés. Le second résultat entraîne le premier, en vertu de l'identité

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2} = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2.$$

3. On sait que Fermat affirmait posséder la démonstration du théorème. Dans le seul passage où il ait donné quelque idée de ces méthodes, il dit procéder par récurrence.

La démonstration donnée ici présente ce caractère. En outre, elle repose sur des considérations très simples et ne fait aucun appel, patent ou déguisé, à des théories telles que celle des fractions continues. Il n'est donc pas impossible qu'elle se rapproche de la démonstration originale de Fermat.

---

[1] A la première puissance seulement, car 2^2 ne pourrait diviser A^2B^2 sans que A et B fussent tous les deux pairs, ce qui n'est pas, puisque ces nombres sont premiers entre eux.

[M¹5][M¹6h]

REMARQUES SUR UN ARTICLE DE M. GOORMAGHTIGH;

Par M. F. BALITRAND.

Dans l'article dont il s'agit (1916, p. 241), M. Goormaghtigh a déduit des propriétés d'une hypocycloïde à trois rebroussements (H_3) certaines propriétés d'une cardioïde (C), en passant par l'intermédiaire d'autres courbes, notamment du folium de Descartes. Cette déduction peut se faire directement, si l'on remarque que (H_3) peut être projetée, ou transformée homographiquement, suivant (C) et réciproquement.

Soient A, B, C les points de rebroussement d'une (H_3); M, N, P ses sommets; F son centre; I et J les points cycliques de son plan. Faisons une projection telle que B et C deviennent les points cycliques, b et c, du nouveau plan. (H_3) deviendra une cardioïde qui aura pour troisième point de rebroussement a, projection de A; pour foyer singulier triple f, projection de F; pour points de contact de sa tangente double, i et j, projections des points cycliques I et J.

Le cercle ABC se projettera suivant le cercle aij; c'est-à-dire suivant le cercle Γ'_1 de M. Goormaghtigh; le cercle MNP suivant l'hyperbole H'_1. On peut donc ajouter aux propriétés de cette dernière les suivantes :

Elle est bitangente au cercle Γ'_1 *aux points* i *et* j;
Elle est tritangente à la cardioïde.

Les points de contact avec cette courbe sont le

sommet m et les points où elle est rencontrée par les droites isotropes issues de son foyer.

Cela posé, la transformation des propriétés fondamentales et classiques de (H_3) conduit pour (C) aux suivantes, qui complètent, pour une partie, celles qui ont été données par M. Goormaghtigh :

Une tangente à (C) *au point* q, *coupe la courbe en deux autres points* r *et* s; *les tangentes en ces points se rencontrent en* t *sur* H'_1;

Elles divisent harmoniquement le segment ij;

La tangente en t *à* H'_1 *et la troisième tangente à* (C), *issue de ce point, divisent harmoniquement le segment* ij;

Cette troisième tangente et la tangente rs *se coupent sur* H'_1 *et divisent harmoniquement le segment* ij;

Si la tangente rs *varie, le conjugué harmonique du point où elle rencontre la droite* ij, *par rapport aux points* r *et* s, *décrit* H'_1;

La droite tf *passe par l'un des points de rencontre de* rs *avec* H'_1.

Inversement, les propriétés de la cardioïde fournissent par la même transformation des propriétés correspondantes pour l'hypocycloïde. Par exemple, les propriétés relatives au lieu des sommets des angles droits circonscrits à (C) (*Nouv. Ann.*, 1915, p. 216) fournissent les suivantes pour (H_3) :

Si, par un point de rebroussement A *d'une* (H_3), *on mène une droite qui coupe la courbe en* H *et* K, *les tangentes en ces points divisent harmoniquement le segment* BC *des deux autres points de rebroussement;*

Le point de concours L *des tangentes en* H *et* K *décrit une conique qui passe en* B *et* C, *où elle touche les tangentes de rebroussement*, *et en* M *où elle touche* (H_3);

Le conjugué harmonique, *par rapport à* H *et* K, *du point où la droite coupe* BC, *décrit une conique circonscrite à* ABC *et touchant en* B *et* C *les tangentes de rebroussement.*

La propriété fondamentale de la cardioïde d'être la podaire d'un cercle par rapport à un point de ce cercle donne, après transformation, la propriété suivante de l'hypocycloïde, peut-être nouvelle :

Si l'on joint un point variable O *d'une hypocycloïde à ses points de rebroussement, la droite conjuguée harmonique de* OA, *par exemple*, *par rapport à* OB *et* OC, *enveloppe une conique circonscrite à* ABC *et ayant pour sommets les points* A *et* M.

Les propriétés projectives de l'une et l'autre courbe, relatives à la courbure, se transforment aussi aisément. Il suffit pour cela d'observer que le cercle osculateur en un point de la cardioïde, par exemple, devient une conique ayant un contact du second ordre avec (H_3), au point correspondant, et passant en outre en B et C. Le point de rencontre des tangentes à la conique en ces points, correspond au centre du cercle osculateur. De plus, la conjuguée harmonique de la tangente au point de contact, par rapport aux droites qui le joignent à B et C, passe par ce point de rencontre. Il en résulte, d'après une propriété bien connue de (C), que *si l'on considère les coniques passant en* B *et* C *et ayant un contact du second ordre avec* (H_3), *le lieu du pôle de* BC, *par rapport à ces coniques*, *est une*

quartique de troisième classe ayant B *et* C *pour points de rebroussement.*

On peut généraliser les propriétés précédentes, et les étendre à une quartique de troisième classe quelconque, en remarquant que la cardioïde, comme d'ailleurs l'hypocycloïde, peut, par une transformation homographique convenablement choisie, donner n'importe quelle quartique à trois rebroussements ([1]). Puis, par une transformation dualistique, arriver aux propositions correspondantes pour les courbes du troisième ordre et de quatrième classe, c'est-à-dire pour les cubiques unicursales.

Ainsi le théorème suivant : *Le lieu des points d'où l'on peut mener à une* (H_3) *trois tangentes ayant leurs points de contact en ligne droite est le cercle* ABC, donne comme proposition corrélative : *L'enveloppe des droites qui coupent une cubique unicursale en trois points tels que les tangentes à la cubique en ces points concourent, est la conique inscrite au pentagone formé par les tangentes d'inflexion et les tangentes au point double.*

De même, la propriété fondamentale de (C) d'être la podaire d'un cercle par rapport à un de ses points, fournit pour les cubiques unicursales, le théorème suivant :

Soient A, B, C *les points d'inflexion d'une cubique unicursale et* α, β, γ *les tangentes en ces points; si l'on prend le conjugué harmonique du point où une tangente mobile à la cubique coupe* α, *par rapport aux points où elle coupe* β *et* γ, *le lieu de ce point est une conique inscrite au triangle des*

([1]) *Voir* Gomes Teixeira, *Courbes spéciales remarquables*, t. I, p. 257, et t. II, p. 194.

tangentes d'inflexion et touchant la cubique au point de contact, avec cette courbe, de la tangente issue de A.

Quelque différents que soient en apparence les deux théorèmes précédents, ils ne résultent pas moins l'un de l'autre, au moyen de deux transformations homographiques suivies d'une transformation dualistique.

[L¹14]

SUR DEUX PROPOSITIONS DE LAGUERRE;

Par M. R. BOUVAIST.

Je me propose de donner des démonstrations des deux propositions de Laguerre signalées par M. Fontené dans le numéro de juin 1916 des *Nouvelles Annales* (p. 271).

Première proposition. — *Le cercle pédal d'un point fixe par rapport aux triangles inscrits à une conique et circonscrits à une autre a pour enveloppe une analagmatique du quatrième ordre.*

Désignons par T les triangles inscrits dans une conique (S) et circonscrits à une conique (S'); deux quelconques de ces triangles sont conjugués à une conique (Σ), par rapport à laquelle (S) et (S') sont polaires réciproques; les cercles (C) circonscrits aux triangles (T) sont donc orthogonaux au cercle de Monge de (Σ). Deux de ces cercles et deux seulement se décomposeront à une droite et la droite de l'infini, ce sont ceux qui ont pour un de leurs sommets

les points à l'infini de (S), les côtés opposés seront respectivement les tangentes menées à (S′) par le centre de (Σ). Le lieu des centres des cercles (C) sera donc une conique dont les directions asymptotiques seront perpendiculaires aux tangentes menées à (S′) du centre de (Σ). En résumé, les cercles (C) enveloppent une analagmatique du quatrième ordre [*voir*, pour étude analytique de cette question, ma solution de la question proposée **1704**^{bis} (*Nouv. Ann.*, 1916, p. 184)].

Ceci posé, on en déduit immédiatement que, par un point quelconque P du plan, passent deux cercles (C), c'est-à-dire que le lieu des centres des coniques admettant par foyer le point P et inscrites aux triangles T, est une conique.

D'autre part, les cercles (C_1) passant par les projections de P sur les côtés des triangles T sont orthogonaux à un cercle fixe, car si l'on transforme par polaires réciproques relativement à un cercle (Γ) de centre ω le théorème de Fauve, on obtient le suivant :

Étant donnés un point fixe ω et une conique (Σ) les cercles passant par les pieds des perpendiculaires abaissées de Σ sur les côtés des triangles conjugués à (Σ), sont orthogonaux à un cercle fixe. La première proposition est donc démontrée.

Deuxième proposition. — *On considère une ellipse; soient u et v les distances des foyers de l'ellipse au centre du cercle, de sorte que les puissances de ces foyers par rapport au cercle sont*

$$P = u^2 - R^2, \qquad P' = v^2 - R^2.$$

Les conditions de fermeture pour un triangle ou un quadrilatère circonscrit à l'ellipse et inscrit au

cercle sont respectivement :

$$PP' = 4b^2R^2,$$
$$\frac{b^2R^2}{PP'} + \frac{a^2}{P+P'} = \frac{1}{4}.$$

α. *Cas du triangle.* — Désignons par I et J les points cycliques, par O le centre du cercle, par F et F', φ et φ' les foyers réels ou imaginaires de l'ellipse. Nous obtiendrons la condition cherchée en exprimant que la droite $\alpha\beta$, joignant les points d'intersection du cercle (O) avec les tangentes IF, IF' à l'ellipse, est tangente à cette dernière. Soient Δ et Δ_1 les axes radicaux du cercle O et des foyers F et F', ces droites coupent OF et OF' en K et K', nous obtiendrons les points α et β, en prenant les points d'intersection de Δ et Δ_1 avec les droites obtenues en faisant tourner dans le même sens, le sens direct par exemp e, les droites FO, F'O d'un angle dont la tangente sera égale à i.

Si nous désignons s et s' les points d'intersection de $\alpha\beta$ avec FO, F'O, par H le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur $\alpha\beta$, par θ et θ' les angles $\widehat{SOH}$, $\widehat{S'OH}$, et enfin par δ et δ' les perpendiculaires abaissées de F et F' sur $\alpha\beta$, nous aurons

$$\delta = FS\cos\theta = (FK + iFK\tang\theta)\cos\theta = FK\,e^{i\theta},$$
$$\delta' = F'S'\cos\theta' = (F'K' - iF'K'\tang\theta')\cos\theta' = F'K'e^{-i\theta'},$$

d'où

$$\delta\delta' = FK.F'K'e^{i(\theta-\theta')}.$$

Posons

$$\widehat{\alpha OS} = \varphi, \qquad \widehat{\beta OS'} = \varphi';$$

comme $\widehat{\alpha OH} = \widehat{\beta OH}$, nous aurons

$$\theta + \varphi = \theta' - \varphi', \qquad \text{d'où} \qquad \delta\delta' = FK.FK'e^{-i(\varphi+\varphi')};$$

or

$$R\cos\varphi = OK, \qquad R\sin\varphi = iFK;$$

d'où

$$R(\cos\varphi + i\sin\varphi) = e^{i\varphi} = OK - FK = \frac{R^2}{OF},$$

de même

$$R(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = e^{i\varphi'} = OK' - FK' = \frac{R^2}{OF'},$$

d'où enfin

$$\delta\delta' = \frac{FK.FO.F'K'.F'O}{R^2} = \frac{PP'}{4R^2}.$$

Si $\alpha\beta$ touche l'ellipse, on aura

$$\delta\delta' = b^2,$$

d'où

$$PP' = 4b^2R^2.$$

β. *Cas du quadrilatère.* — Considérons en général une conique Σ et un point P, deux rayons correspondants d'une involution de sommet P, $\alpha P\beta$, $\gamma P\delta$, coupent la conique Σ en α, β, γ, δ, le quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ est inscrit dans une conique Σ', et le point P a même polaire par rapport à Σ et Σ'. Ce point P est d'ailleurs le point de concours des diagonales de tous les quadrilatères inscrits dans Σ et circonscrits à Σ'.

Dans le cas qui nous occupe, le point de concours fixe des diagonales de tous les quadrilatères inscrits dans le cercle O et circonscrits à l'ellipse donnée, sera le point O intersection $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, ces deux droites étant les cordes d'intersection du cercle O avec les tangentes IF, IF', JF, JF' à l'ellipse. La polaire du point O par rapport au cercle O est visiblement la droite R_1R_2, R_1 et R_3 étant respectivement les centres radicaux des foyers F et F' et du cercle O, des foyers φ et φ' et du cercle O. Nous obtiendrons donc la condition cherchée

en écrivant que la droite $R_1 R_2$ a même pôle par rapport au cercle et à l'ellipse.

Soit ω le centre de l'ellipse nous aurons

$$\omega R_1 = \frac{\overline{OO_1}^2 + \overline{OO_2}^2 - R^2 - c^2}{2 OO_2},$$

$$\omega R_2 = \frac{\overline{OO_1}^2 + \overline{OO_2}^2 - R^2 + c^2}{2 OO_1},$$

O_1 et O_2 étant les projections de O sur ωR_1, ωR_2,

$$\omega R_1 = \frac{\overline{\omega O}^2 - R^2 - c^2}{2 OO_2}, \qquad \omega R^2 = \frac{\overline{\omega O}^2 - R^2 + c^2}{2 OO_1}.$$

La droite $R_1 R_2$ aura même pôle par rapport au cercle et à l'ellipse si l'on a

$$OO_1 . \omega R_2 - a^2 = OO_2 . \omega R_1 - b^2 = \frac{R_2}{\dfrac{OO_1}{\omega R_2} + \dfrac{OO_2}{\omega R_1} - 1},$$

conditions qui se réduisent à la suivante :

$$\left(\overline{O\omega}^2 - R^2 - a^2 - b^2\right) \left[\frac{\overline{2 OO_1}^2}{\overline{O\omega}^2 - R^2 + c^2} + \frac{\overline{2 OO_2}^2}{\overline{O\omega}^2 - R^2 - c^2} - 1 \right] = 2 R^2.$$

Si

$$P = \overline{OF}^2 - R^2, \qquad P' = \overline{OF'}^2 - R^2,$$

$$P + P' = 2\left(\overline{O\omega}^2 - R^2 + c^2\right), \qquad P - P' = 4c . OO_1,$$

$$\overline{OO_1}^2 + \overline{OO_2}^2 = \overline{O\omega}^2, \qquad \frac{P + P'}{2} - 2c^2 = \overline{O\omega}^2 - R^2 - c^2,$$

d'où

$$[P + P' - 4a^2] \left[\frac{\overline{4OO_1}^2}{P + P'} + \frac{\overline{4OO_2}^2}{P + P' - 4c^2} - 1 \right] = 4 R^2,$$

$$(P + P' - 4a^2)\,[PP' + R^2(P + P')]$$
$$= R^2(P + P')(P + P' - 4c^2),$$

d'où enfin

$$(P + P')\,PP' = 4a^2 PP' + 4b^2 R^2 (P + P')$$

ou

$$\frac{1}{4} = \frac{b^2 R^2}{PP'} + \frac{a^2}{P + P'}.$$

CORRESPONDANCE.

M. **F. Balitrand**. — *Au sujet de la question* 1614. — Elle est résolue dans le nouvel Ouvrage de M. G. Darboux (*Principes de Géométrie analytique*, p. 96).

M. G. Darboux la considère comme nouvelle, car il dit :

« Avant de continuer cette exposition des principes nous examinerons une question qui nous paraît nouvelle. »

Sa solution, basée sur les formules d'Olinde Rodrigues pour le déplacement fini d'un solide invariable autour d'un point fixe, est complète ; mais assez longue et compliquée. On peut espérer en trouver une plus simple, surtout par voie synthétique.

QUESTIONS.

2324. Soient ABC un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de centre O et M un point pris sur l'arc BC de ce cercle. La droite MA coupe BC en α. Démontrer que

$$\frac{1}{M\alpha} = \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}.$$

F. Balitrand.

2325. Si, d'un point variable d'une droite fixe perpendiculaire à l'axe d'une parabole, on mène les trois normales à la courbe, l'hypocycloïde de Steiner du triangle formé par les centres de courbure correspondant aux pieds de ces normales reste tangente à une droite fixe.

R. GOORMAGHTIGH.

2326. Soient ABCD un quadrilatère inscrit dans un cercle O de rayon R; P le point de concours des diagonales; I_1, I_2, I_3, I_4 les cercles inscrits aux triangles ABC, CDA, BCD, DAB, de rayons r_1, r_2, r_3, r_4; r_{1a}, r_{1b}, r_{1c}, etc., les rayons des cercles exinscrits; ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 les centres des cercles des neuf points de ces triangles.

I. 1° Le quadrilatère $I_1I_2I_3I_4$ est un rectangle dont les côtés sont deux à deux également inclinés sur ceux du quadrilatère ABCD;

2° Établir les relations

$$r_1 + r_2 = r_3 + r_4;$$

$$\Sigma(r_{1a} + r_{2a}) = \Sigma(r_{3a} + r_{4a});$$

$$\overline{OI}_1^2 + \overline{OI}_2^2 = \overline{OI}_3^2 + \overline{OI}_4^2;$$

$$\Sigma\left(\overline{OI}_{1a}^2 + \overline{OI}_{2a}^2\right) = \Sigma\left(\overline{OI}_{3a}^2 + \overline{OI}_{4a}^2\right);$$

$$\sqrt{AI_1 . BI_1 . CI_1} + \sqrt{AI_2 . CI_2 . DI_3}$$
$$= \sqrt{BI_3 . CI_3 . DI_3} + \sqrt{AI_4 . BI_4 DI_4};$$

$$\omega_2 I_1 + \omega_2 I_2 = \omega_3 I_3 + \omega_4 I_4;$$

3° $$\frac{r_1 r_2}{r_3 r_4} = \frac{AC}{BD}.$$

II. Soient $\alpha\beta\gamma\delta$ le quadrilatère podaire de P par rapport à ABCD; A'B'C'D' le quadrilatère obtenu en traçant par A, B, C, D les parallèles à $\alpha\delta$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$. Posons $OP = d$.

1° On a les relations

$$\frac{\text{aire } \alpha\beta\gamma\delta}{\text{aire ABCD}} = \frac{R^2 - d^2}{2R^2};$$

$$\frac{\alpha\beta . \gamma\delta}{\beta\gamma . \delta\alpha} = \left(\frac{BD}{AC}\right)^2.$$

2° Le rapport de similitude des quadrilatères $\alpha\beta\gamma\delta$ et $A'B'C'D'$ est $\frac{R^2 - d^2}{2R^2}$.

3° La droite de Newton du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ et les diagonales du quadrilatère ABCD sont concourantes.

V. THÉBAULT.

2327. Si sur chaque rayon vecteur OM d'une lemniscate de centre O, on porte, à partir de O, une longueur égale au rayon de courbure de la courbe en M, le lieu des extrémités des longueurs ainsi obtenues est une hyperbole équilatère.

F. BALITRAND.

2328. Étant donnée une lemniscate de centre O et de sommet A, on mène un rayon vecteur quelconque OM et l'on projette le sommet A sur ce rayon vecteur en P :

1° Démontrer que l'aire du secteur de lemniscate AOM et l'aire du triangle OAP sont égales. En déduire un moyen de diviser un secteur de lemniscate en deux parties équivalentes, avec la règle et le compas et sans supposer la courbe tracée.

2° La perpendiculaire élevée en O à OM et la normale en M à la courbe se coupent en Q. Démontrer que l'aire du triangle MOQ est double de celle du triangle AOP.

F. BALITRAND.

ERRATA.

Page 224, ligne 12, *au lieu de* cinisnatique, *lire* cinématique.

Page 224, ligne 14 en remontant, *au lieu de* $V_a - \omega.KL$, *lire* $V_a = \omega.KL$.

[O¹2e, o]

RECHERCHES GÉOMÉTRIQUES SUR LE CENTRE DE COURBURE DES TRAJECTOIRES D'UNE FAMILLE QUELCONQUE DE COURBES PLANES [1];

Par M. FARID-BOULAD.
(Le Caire.)

En posant la question n° 2220 dans ce recueil (4e série, t. XIV, mars 1914, p. 144), M. d'Ocagne a fait connaître la construction élégante énoncée ci-après du centre de courbure des trajectoires orthogonales Γ d'un système de cercles homothétiques C par rapport à un pôle O.

Le centre de courbure de la courbe Γ *répondant au point* M *où elle coupe orthogonalement le cercle* C, *est le pôle de la droite* OM *par rapport à ce cercle.*

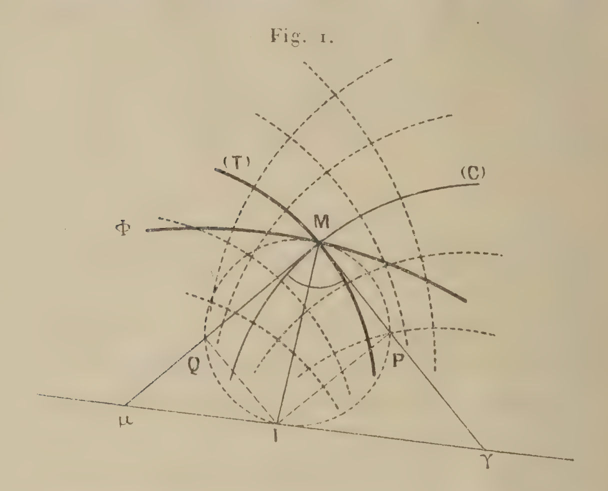
En recherchant une démonstration géométrique de ce théorème, nous avons été conduit à entreprendre des recherches plus approfondies sur le centre de courbure des trajectoires orthogonales d'une famille quelconque de courbes planes dépendant d'un paramètre variable, à envisager aussi le cas plus général où la trajectoire coupe sous un même angle donné toutes les courbes de cette famille.

[1] Les principaux résultats de cette Note ont déjà figuré dans une autre Note insérée au *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XL.

Nous allons faire connaître ici les résultats que nous avons obtenus. Ces résultats consistent dans trois théorèmes et leur application dans divers cas généraux.

1. Considérons dans le plan de la figure 1 deux fa-

Fig. 1.



milles quelconques de courbes orthogonales (C) et (T) dépendant chacune d'un paramètre variable. Soient γ et μ les deux centres de courbure respectifs de deux courbes (C) et (T) répondant au point M où elles se coupent orthogonalement.

Supposons que l'angle droit $\gamma M \mu$ se déplace dans son plan de façon que son sommet M reste sur une courbe continue Φ et que, dans chaque position M de ce sommet, les deux côtés $M\gamma$ et $M\mu$ de cet angle soient respectivement normaux aux deux courbes (C) et (T) passant par ce sommet M. En d'autres termes, supposons que ces deux côtés soient respectivement la normale de la tangente en M à la courbe (C) passant par ce point M dans sa nouvelle position sur la courbe Φ. Soit I le centre instantané de rotation correspondant à

la position de cet angle en un point quelconque M de sa trajectoire arbitraire Φ et à cette dernière.

Notons que les deux centres de courbure γ et μ répondant au point de croisement M des deux courbes (C) et (T) sont aussi les deux centres instantanés de rotation correspondant respectivement aux deux positions de l'angle $\gamma M \mu$, en ce point M, en prenant respectivement ces deux courbes (C) et (T) comme trajectoire Φ du sommet M de cet angle.

Cela posé, les centres γ, I et μ donnent lieu au théorème suivant :

Théorème I, dit « des centres alignés ». — *Quelle que soit la trajectoire* Φ *du sommet* M *de l'angle droit* $\gamma M \mu$, *les trois centres* γ, I *et* μ *répondant à un point* M *de cette trajectoire, sont en ligne droite. Si cette trajectoire* Φ *coupe sous un même angle toutes les courbes* (C) *de la famille considérée, le centre instantané* I *correspondant à la position du sommet de cet angle en un point* M *de cette trajectoire oblique est aussi le centre de courbure de cette trajectoire répondant à ce point* M. *La droite* $\gamma\mu$ *correspondant à un point* M *est le lieu des centres instantanés de rotation* I *correspondant aux positions de l'angle droit, en ce point* M, *pour une infinité de trajectoires quelconques* Φ *passant par ce point* M. *Cette droite est encore le lieu des centres de courbure en ce même point* M *de ces diverses trajectoires si chacune d'elles coupe sous un même angle constant toutes les courbes* (C).

Remarque importante. — On sait que, quelle que soit la trajectoire Φ, si P et Q sont les points de contact des deux côtés $M\gamma$ et $M\mu$ de cet angle droit avec leurs enveloppes, le centre instantané I est le point de

concours de la normale en M à la trajectoire Φ et des deux perpendiculaires élevées respectivement en P et Q à ces deux côtés.

Il s'ensuit que, pour avoir un centre instantané I répondant à un point M, il suffit d'adopter une trajectoire Φ de ce point telle que sa normale en ce point M soit connue et que l'un des deux points de contact P et Q soit déterminé aisément.

Alors, si l'on connaît le centre de courbure γ de la courbe (C) répondant à ce point M et si l'on a obtenu l'un des deux points P et Q, par exemple le point P, on aura immédiatement le centre de courbure de la trajectoire (T) en ce point au point d'intersection de la tangente en M à la courbe (C) avec la droite joignant le centre γ au point de concours I de la normale en M à la trajectoire Φ et de la perpendiculaire en P à la droite $M\gamma$.

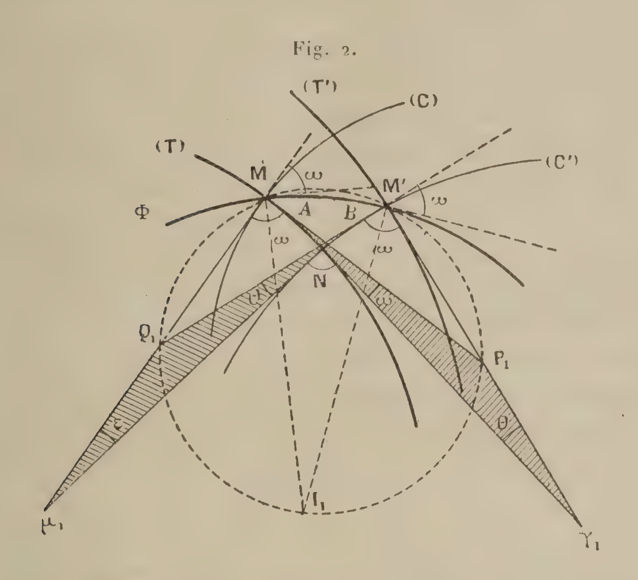
Si la famille de courbes (C) est définie par une transformation géométrique ponctuelle, on prendra comme trajectoire convenable Φ le lieu des points situés sur les courbes (C) et qui sont les points correspondants du point M. Ces points s'obtiennent par cette transformation.

S'il s'agit à présent de déterminer le centre de courbure en un point M d'une trajectoire oblique Φ qui coupe sous un même angle donné toutes les courbes de la famille considérée (C), il suffit *d'avoir le centre de courbure* μ *de la trajectoire orthogonale* (T) *répondant à ce point* M *et de prendre ensuite comme centre de courbure cherché* I *le point d'intersection de la droite* $\gamma\mu$ *avec la normale en* M *à cette trajectoire* Φ.

Démonstration. — Considérons sur la trajectoire Φ

(*fig.* 2) un point M′ infiniment voisin de M. Appelons (C′) et (T′) les deux courbes respectives des deux familles (C) et (T) qui se coupent orthogonalement en

Fig. 2.



ce point M′. Soit N le point où la trajectoire (T) coupe la courbe (C′).

Soient γ_1 et P_1 les deux points de rencontre de la tangente en M′ à la trajectoire (T′) respectivement avec les deux tangentes en N et M à la trajectoire (T) et A le point de rencontre de ces deux dernières tangentes. Soient aussi μ_1 et Q_1 les deux points de rencontre de la tangente en M à la courbe (C) respectivement avec les deux tangentes en N et M′ à la courbe (C′) et B le point de rencontre de ces deux dernières tangentes.

Cela posé, comme les angles aux trois sommets A, γ_1, P_1 du triangle $A\gamma_1P_1$ sont respectivement égaux aux angles aux trois sommets μ_1, B, Q_1 du triangle μ_1BQ_1, ces deux triangles hachurés sont semblables.

Leur similitude donne par suite la proportion

$$\frac{AP_1}{A\gamma_1} = \frac{Q_1\mu_1}{B\mu_1}.$$

Or, si l'on considère ensemble les deux figures 1 et 2, on voit que, lorsque le point M' se confond avec M, chacun de ces deux triangles s'aplatira et deviendra une droite. Les deux points γ_1 et μ_1 deviendront alors respectivement les deux centres de courbure γ et μ (*fig.* 1) répondant au point M, et P_1 et Q_1 deviendront aussi les deux points de contact P et Q des deux côtés de l'angle droit $\gamma M\mu$ avec leurs enveloppes. En outre, le cercle circonscrit au quadrilatère $P_1M'NQ$ deviendra le cercle tangent en M de la trajectoire Φ et circonscrit au rectangle IPMQ. La proportion ci-dessus deviendra par suite

$$\frac{MP \text{ ou } QI}{M\gamma} = \frac{Q\mu}{M\mu},$$

qui justifie que les trois centres γ, I, μ sont en ligne droite.

Comme la droite $\gamma\mu$ est fixe quand le point correspondant M est fixe, il en résulte que, si l'on fait varier la trajectoire Φ passant par ce point M, le lieu des centres instantanés correspondants I est précisément cette même droite $\gamma\mu$.

A présent, il est aisé de voir que, si la trajectoire Φ du sommet M de l'angle droit $\gamma M\mu$ coupe sous un angle donné constant ω toutes les courbes (C), l'angle formé par le côté $M\gamma$ et la normale MI en M à cette trajectoire restera, pendant le déplacement, égal à l'angle constant ω. Par suite les deux normales en M et M' à cette trajectoire se couperont en un point I_1 sur le cercle $QMM'P_1$ qui a pour limite le cercle QMPI

(*fig.* 1). Dans ce cas, le point I limite de I_1 est alors, à la fois, le centre instantané de rotation et le centre de courbure de cette trajectoire répondant au point M. D'ailleurs on reconnaît cela aisément en remarquant que la normale en M à cette trajectoire Φ est invariablement liée à l'angle $\gamma M \mu$, parce que cette normale forme avec ce côté un angle égal à ω.

Elle a, par suite, le centre instantané I comme point de contact avec son enveloppe. Ce point est donc aussi le centre de courbure de cette trajectoire.

2. Donnons ci-après l'énoncé d'un théorème qui permet de ramener le problème de la détermination du centre de courbure des trajectoires orthogonales d'une famille quelconque (C), à la recherche du centre de courbure des trajectoires orthogonales d'une famille de cercles de rayons variables :

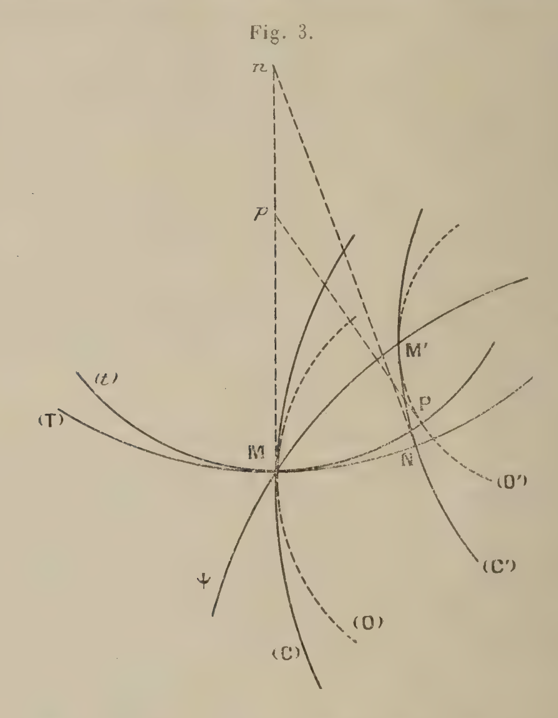
Théorème II. — *Si l'on considère les deux trajectoires orthogonales* (T) *et* (t) *passant par un même point* M *et qui sont respectivement orthogonales à une famille quelconque de courbes planes et à la famille des cercles osculateurs* (O) *à ces courbes* (C) *à leurs divers points de rencontre avec une courbe quelconque continue* Φ *dite auxiliaire passant aussi par ce même point* M, *ces deux trajectoires* (T) *et* (t), *tangentes à ce point* M, *ont même centre de coubure répondant à ce même point. En d'autres termes*, *elles sont osculatrices en ce point* M.

En effet, soit M′ (*fig.* 3) un point sur la courbe ψ infiniment voisin de M. Appelons (C) et (C′) les deux courbes de la famille passant respectivement en M et M′, et (O) et (O′) les deux cercles osculateurs à ces deux courbes respectivement en M et M′. Soient N et P les

deux points où les deux trajectoires orthogonales (T) et (t) coupent orthogonalement la courbe (C′) et son cercle osculateur (O′).

Les deux triangles rectangles infiniment petits MNM′ et MPM′ étant égaux et ayant même hypoténuse MM′,

Fig. 3.



les deux points N et P se confondront à la limite lorsque le point M′ se rapproche indéfiniment de M. Comme les centres de courbure des trajectoires (T) et (t) répondant au point M sont les limites des points d'intersection n et p de la tangente en M à la courbe (C) avec les deux tangentes en N et P aux courbes (C′) et (O′), il en résulte que ces deux trajectoires ont même centre de courbure en M.

3. Le théorème suivant ramène la détermination du centre de courbure des trajectoires d'une famille de courbes à la recherche du centre de courbure des trajectoires d'une autre famille de courbes plus simple.

Théorème III. — *Si deux familles quelconques de courbes planes* (C) *et* (D), *dependant chacune d'un paramètre variable, ont en commun deux courbes* (C) *et* (C′) *infiniment voisines, les deux trajectoires orthogonales* (T_c) *et* (T_d) *respectives de ces deux familles et passant par un même point* M *d'une de ces deux courbes communes à ces deux familles, ont même centre de courbure répondant à ce point* M.

Ce théorème résulte immédiatement de ce que le centre de courbure d'une trajectoire orthogonale (T_c) d'une famille (C) répondant à un point M est la limite du point de concours des deux normales à cette trajectoire à ce point M et au point de rencontre M′ de cette trajectoire avec la courbe (C′) de cette famille infiniment voisine de la courbe (C).

Or, comme les deux familles (C) et (D) ont en commun deux courbes (C) et (C′) et leurs trajectoires considérées passent par un même point, ces deux trajectoires ont par suite même centre de courbure répondant à ce point.

Remarque. — Les deux familles (C) et (D) ont aussi en commun les points de contact de la courbe considérée (C) avec les enveloppes de ces deux familles.

Application du théorème I.

Appliquons le théorème I des *centres alignés* du n° 1 à la recherche du centre de courbure en un point M de la trajectoire orthogonale (T) de chacune des

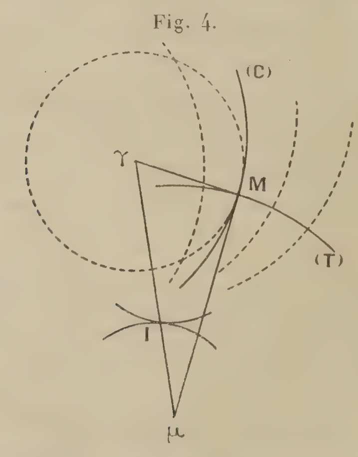
familles définies dans les numéros suivants 4, 5, 6, 7, 8, en supposant que l'on donne le centre de coubure γ de la courbe (C) répondant à ce point M.

4. *Famille de courbes quelconques* (C) *homothétiques par rapport à un pôle* O. — Prenons la droite OM comme trajectoire Φ du sommet M. Comme les tangentes des deux courbes homothétiques infiniment voisines (C) et (C′) aux deux points homologues M et M′ intersecteurs de la droite OM avec ces courbes, sont parallèles, le point Q, où la tangente Mμ touche son enveloppe, se trouve à l'infini sur cette droite.

Il s'ensuit que le centre instantané I se trouve également à l'infini sur la perpendiculaire en M à la droite OM. Par suite le *centre* μ *est le pôle de la droite* OM *par rapport au cercle osculateur en* M *à la courbe* (C).

5. *Famille de courbes obtenue par le déplacement*

Fig. 4.



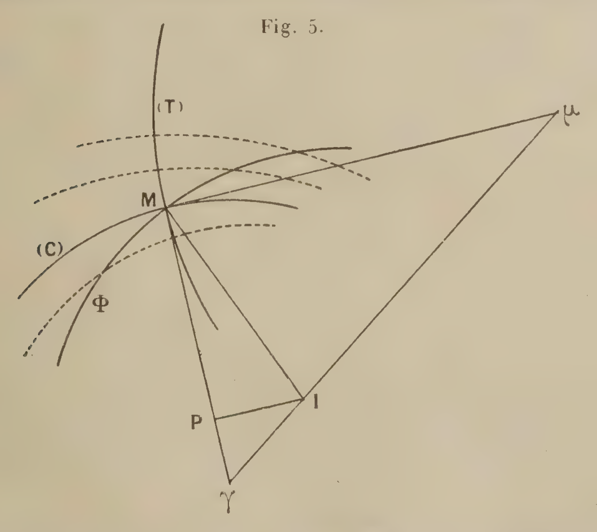
d'une courbe quelconque (C) (*fig.* 4) *de forme invariable dans son plan.* — Soit I le centre instantané de

rotation correspondant à la position de la courbe (C). En prenant comme trajectoire Φ la courbe décrite par le point M entraîné dans le déplacement de la courbe (C), le déplacement de l'angle droit $\gamma M \mu$ se fait comme si cet angle était entraîné dans le mouvement de la courbe (C). Par suite le centre instantané I correspondant à la courbe (C) est aussi celui correspondant à l'angle $\gamma M \mu$.

Il en résulte que *le centre de courbure* μ *est à l'intersection de la tangente en* M *à la courbe* (C) *avec la droite joignant le centre* γ *au centre instantané* I *correspondant à la courbe considérée* (C).

6. *Famille de courbes* (C) *décrite par les divers points* M *d'une courbe plane quelconque* (M) (*fig.* 5) *de forme invariable qui se déplace d'une manière continue.* — En prenant la courbe (M) comme trajec-

Fig. 5.



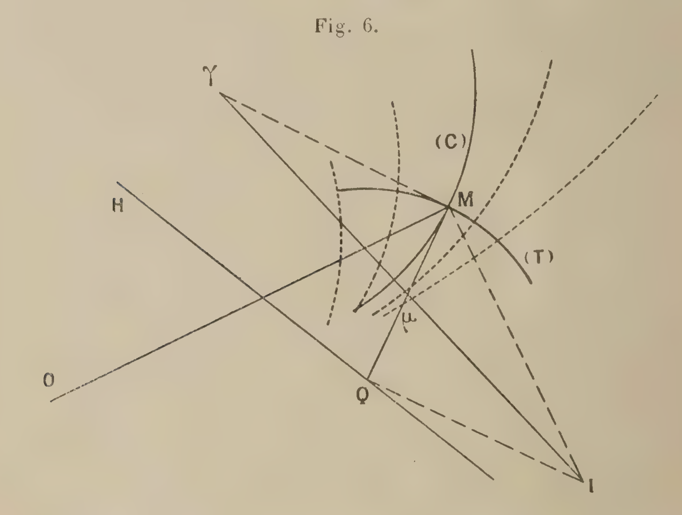
toire Φ du sommet de l'angle $\gamma M \mu$ on voit aisément que le centre instantané de rotation correspondant à

la position de cette courbe mobile (M) est le point de contact P du côté Mγ de cet angle avec son enveloppe.

Il en résulte que le *centre* μ *est l'intersection de la perpendiculaire en* M *à la droite* MPγ *avec la droite joignant le centre de courbure* γ *de la courbe* (C) *au point d'intersection* I *de la normale en* M *à la courbe* (M) *avec la perpendiculaire en* P *à la droite* PM.

7. *Famille de courbes quelconques homologiques* (C) (*fig.* 6) *par rapport à un centre d'homologie* O *et un axe d'homologie* HQ. — Soit Q le point de

Fig. 6.



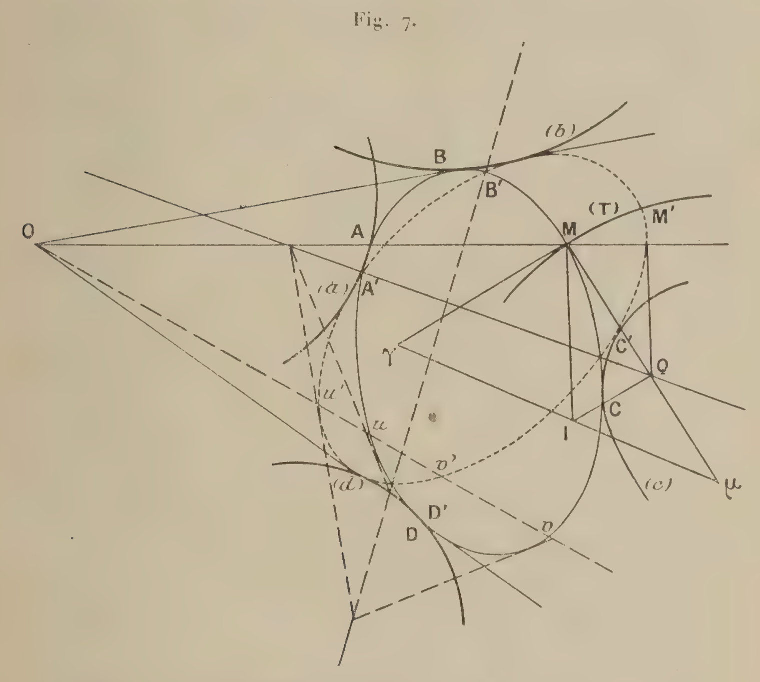
rencontre de la tangente en M à la courbe (C) avec l'axe HQ. En prenant la droite OM comme trajectoire Φ, le point Q est le point de contact du côté Mμ de l'angle droit γMμ avec son enveloppe.

Il s'ensuit que le *centre* μ *est l'intersection de la tangente en* M *à la courbe* (C) *avec la droite* γI *joignant le centre de courbure* γ *à la courbe* (C) *au*

point de concours I *des deux perpendiculaires élevées en* M *et* Q *aux côtés* MO *et* QM.

8. *Famille quelconque de coniques* (C) (*fig.* 7) *dépendant d'un paramètre variable et définie géo-*

Fig. 7.



métriquement dans le cas le plus général. — Nous allons résoudre géométriquement le problème suivant :

Étant donnés les quatre points de contact A, B, C *et* D *des quatre enveloppes* (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) *de cette famille de coniques avec la conique* (C) *passant par un point* M, *ainsi que le centre de courbure* γ *de cette conique répondant au point* M, *on demande de construire le centre de courbure* μ *de la trajectoire orthogonale* (T) *répondant à ce point* M.

Pour cela, considérons une conique (C) de cette famille infiniment voisine de la conique (C). Soit O le point de concours des deux tangentes communes à ces deux coniques et telles que ces deux courbes soient comprises dans un même angle formé par ces deux tangentes ou dans les angles opposés par leur sommet.

Appelons A′, B′, C′, D′ les quatre points d'intersection de ces deux coniques lesquels, à la limite, deviendront les quatre points donnés A, B, C, D lorsque la conique (C′) se confond avec (C).

Cela posé, on sait en Géométrie projective que ces deux coniques sont, même si elles étaient quelconques, deux figures homologiques ayant le point O pour centre d'homologie et deux cordes communes A′C′ et B′D′ à ces deux coniques pour axe d'homologie correspondant au centre d'homologie O. Dans cette figure, l'axe A′C′ est celui qui correspond aux points homologues infiniment voisins tels que les deux couples de points homologues (u, u') et (v, v') parce que les deux tangentes en ces points se coupent sur cet axe A′C′. Quant à l'autre axe B′D′, il correspond aux points homologues tels que les deux couples de points (u, v') et (v, u') qui sont situés de part et d'autre de cet axe.

A la limite, lorsque la conique (C′) se confond avec (C), le point O deviendra le point de concours des deux tangentes à la conique (C) aux deux points de contact B et D, et les deux axes d'homologie A′C′ et B′D′ deviendront respectivement les deux cordes de contact AC et BD.

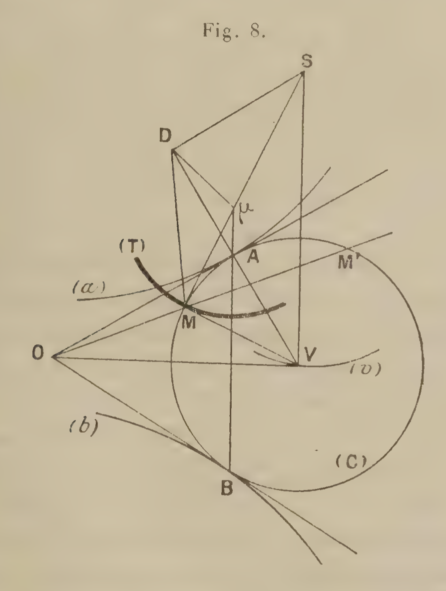
A présent, comme ces deux coniques (C) et (C′) sont homologiques, si l'on prend la droite OM comme trajectoire arbitraire Φ du sommet de l'angle droit $\gamma M \mu$, on voit aisément que le point de contact Q du côté $M\mu$

est le point de rencontre de ce côté avec l'axe AC qui est ici utile.

Il s'ensuit que le centre instantané I est le point d'intersection des deux perpendiculaires en M et Q aux deux droites MO et QM. *Par suite le centre de courbure cherché* μ *est l'intersection de la droite* γI *avec la tangente en* M *à la conique* (C).

Cas particulier. — *Famille de cercles de rayons variables.* — Si les coniques (C) sont des cercles de rayons variables, l'axe d'homologie AC sera rejeté à l'infini et les deux cercles (C) et (C′) seront homothé-

Fig. 8.



tiques par rapport au point O comme pôle. On obtient ainsi l'extension suivante de la construction précitée de M. d'Ocagne à la détermination du centre de courbure des trajectoires orthogonales d'une famille de cercles de rayons variables définie dans les deux cas

suivants les plus généraux : par ses deux courbes enveloppes (a) et (b) (*fig.* 8) ou par l'une quelconque de ces deux courbes et le lieu (v) du centre V de ce cercle.

Dans ces deux cas : *Si* O *est le point de concours des deux tangentes aux deux points de contact* A *et* B *du cercle considéré* (C) *avec ses deux enveloppes* (a) *et* (c) *ou l'une quelconque de ces deux tangentes et de la tangente* VO *en* V *au lieu* (v), *le centre de courbure* μ *de la trajectoire* (T) *répondant au point* M *est le pôle de la droite* OM *par rapport à ce cercle.*

De cette construction on déduit la variante suivante : *Si* S *est le point d'intersection de la parallèle* VS *à la corde de contact* AB *avec la tangente en* M *au cercle* (C), *il suffit de prendre le segment* Sμ *égal à la perpendiculaire* SD *abaissée par* S *sur le rayon* VA, *pour avoir le centre de courbure cherché.*

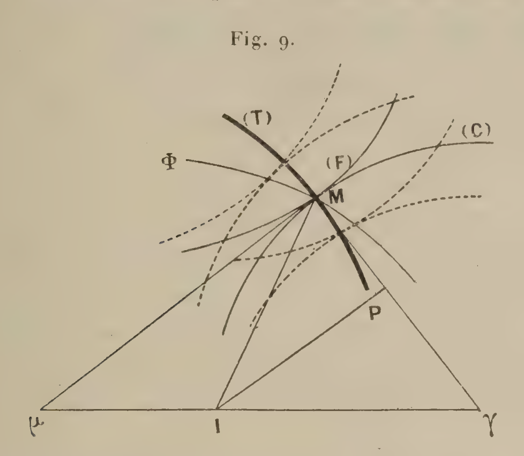
Remarque. — Le segment Sμ sera porté dans le sens SM ou dans le sens contraire, selon que la droite OM joignant O au point considéré M rencontre le cercle (C) en un autre point M situé en dehors ou en dedans de l'intervalle OM.

En effet, les deux triangles SMV et VDS étant rectangles, le quadrilatère SDMV est inscriptible. De même comme Aμ est parallèle à VS, le quadrilatère μDMA est également inscriptible. Il en résulte que les deux triangles μSD et AVM sont semblables et, comme MV = VA, on a Sμ = SD.

9. *Famille de courbes* (C) (*fig.* 9) *qui sont les enveloppes des courbes d'une autre famille quelconque de courbes planes* (F) *mobiles de forme*

invariable pendant son déplacement d'une manière continue. — Soit P le centre instantané de rotation correspondant à une position quelconque de la famille (F) et soit Φ le lieu des pieds des normales menées de

Fig. 9.



ce point P à toutes les courbes de cette famille (F). Si l'on prend ce lieu comme trajectoire Φ du sommet M de l'angle droit $\gamma M \mu$, on voit que le point P est le point de contact du côté $M\gamma$ avec son enveloppe. Par conséquent, le centre instantané I est le point de concours de la normale en M à la courbe Φ et de la perpendiculaire en P à PM.

Application du théorème II.

Appliquons le théorème II du n° 2 à la recherche du centre de courbure en un point M d'une trajectoire (T) de chacune des familles de courbes définies dans les numéros précédents 4 et 5.

10. Considérons la famille définie au n° 4; prenons comme courbe ψ la droite OM. Comme les cercles

osculateurs aux courbes (C) aux points de rencontre de ces derniers avee la droite OM sont aussi homothétiques entre eux par rapport au pôle O, la trajectoire (t) de ces cercles a, d'après M. d'Ocagne, pour centre de courbure répondant au point M, le pôle de la droite OM par rapport au cercle osculateur passant par M. Il en résulte que la trajectoire (T) a, en vertu du théorème II, ce même pôle pour centre de courbure μ.

11. Considérons la famille définie n° 5 et prenons comme courbe ψ la courbe décrite par le point M entraîné dans le déplacement de la courbe (C) (*fig.* 4). On trouve aisément, en se reportant au cas particulier du n° 8, que le centre de courbure μ est le pôle par rapport au cercle osculateur (O) de la perpendiculaire abaissée de M sur la droite Iγ.

Application du théorème III.

Ce théorème s'applique aisément à la détermination du centre de courbure μ de la trajectoire (T) (*fig.* 7) de la famille des coniques (C) définie au n° 8.

En effet, il suffit de faire remarquer que cette famille de coniques (C) et la famille des coniques (D) homologiques de la conique (C) passant par M, en prenant le point O comme centre d'homologie et la corde AC comme axe d'homologie, ont en commun les deux coniques infiniment voisines (C) et (C′). En se servant de la construction du centre de courbure indiquée au n° 7 pour les trajectoires des figures homologiques et en y appliquant le théorème III, on trouve le centre de courbure cherché μ déjà trouvé au n° 8.

[K¹10e]

PUISSANCE D'UNE DROITE PAR RAPPORT A UN CERCLE;

Par M. L. CRELIER.

En dualisant point par point la théorie de la puissance du point par rapport à un cercle, ainsi que celle des axes radicaux de deux cercles, nous sommes amenés à considérer :

1° Le cercle comme un lieu de points;
2° Le cercle comme une enveloppe de tangentes;
3° La sécante, passant par un même point;
4° Les points pris sur une même droite;
5° Les points de coupe de diverses sécantes avec le cercle fondamental;
6° Les paires de tangentes du cercle fondamental issues de divers points.

A notre connaissance, ce dualisme fort élémentaire n'a pas été appliqué jusqu'ici d'une manière systématique aux théories qui nous intéressent, et cependant il conduit à quelques résultats intéressants de la théorie des faisceaux de cercles et des involutions correspondantes.

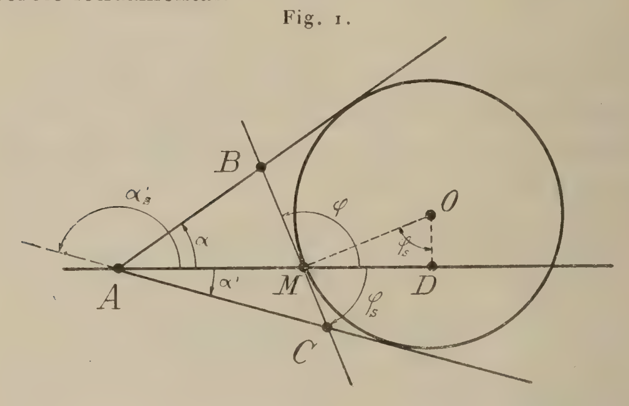
Nous poserons :

p = OD = distance de la droite donnée au centre;
a = longueur des tangentes issues de A;
b = longueur des tangentes issues de B;
.....................................;

α = angle de la première tangente avec la droite donnée;
α' = angle de la deuxième tangente;
$\alpha_s = \pi - \alpha$; $\alpha'_s = \pi - \alpha'$; ...;
ρ = angle de la tangente en M avec la droite donnée (*fig.* 1);
φ = angle de la tangente par D avec la droite donnée (*fig.* 2);
$\varphi_s = \pi - \varphi = \varphi'$.

Nous appellerons *première tangente* par un point celle dont l'angle avec la droite contient le centre du cercle fondamental.

Fig. 1.



Dans le triangle ABM (*fig.* 1), nous aurons

$$\frac{1}{2}\text{ périmètre} = \frac{a - b + b + t}{2} = \frac{a + t}{2} = s \qquad (\text{AM} = t),$$

$$\text{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s - a + b)(s - t)}{s(s - b)}}$$

et

$$\text{tang}\frac{\varphi_s}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - t)}{s(s - a + b)}}.$$

Dans le triangle AMC (*fig.* 1), nous aurons également

$$\frac{1}{2}\text{ périmètre} = \frac{a - c + c + t}{2} = \frac{a + t}{2} = s,$$

$$\text{tang}\frac{\alpha'}{2} = \sqrt{\frac{(s - c + c)(s - t)}{s(s - c)}}$$

et

$$\tang\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-t)}{s(s-a+c)}},$$

d'où nous tirons

$$\tang\frac{\alpha}{2} : \tang\frac{\alpha'}{2} = \tang\frac{\varphi}{2} : \tang\frac{\varphi_s}{2} = \sqrt{\frac{(s-a+b)(s-c)}{(s-a+c)(s-b)}}.$$

Mais

$$\tang\varphi_s = \frac{\sqrt{r^2-p^2}}{p}, \qquad \tang\frac{\varphi_s}{2} = \frac{r-p}{\sqrt{r^2-p^2}}$$

et

$$\tang\frac{\varphi}{2} = \frac{r+p}{\sqrt{r^2-p^2}},$$

puis

$$\tang\frac{\varphi}{2} : \tang\frac{\varphi_s}{2} = \tang^2\frac{\varphi}{2} = \frac{r+p}{r-p} = \text{const.}$$

On aura donc

(1) $$\tang\frac{\alpha}{2} : \tang\frac{\alpha'}{2} = \tang^2\frac{\varphi}{2} = \frac{r+p}{r-p} = \text{const.}$$

ou

(2) $$\tang\frac{\alpha}{2} + \tang\frac{\alpha'_s}{2} = \frac{r+p}{r-p}.$$

Les triangles ABD et ACD (*fig.* 2) donnent de la même manière

$$\tang\frac{\alpha}{2} : \tang\frac{\alpha'}{2} = \tang\frac{\varphi}{2} : \tang\frac{\varphi_s}{2} = \sqrt{\frac{(s-a+b)(s-a+c)}{(s-a-b)(s-a-c)}}.$$

On a aussi

$$\tang\varphi_s = \frac{\sqrt{p^2-r^2}}{r} \qquad \text{et} \qquad \tang\frac{\varphi}{2} = \frac{p+r}{\sqrt{p^2-r^2}}.$$

Il en résulte

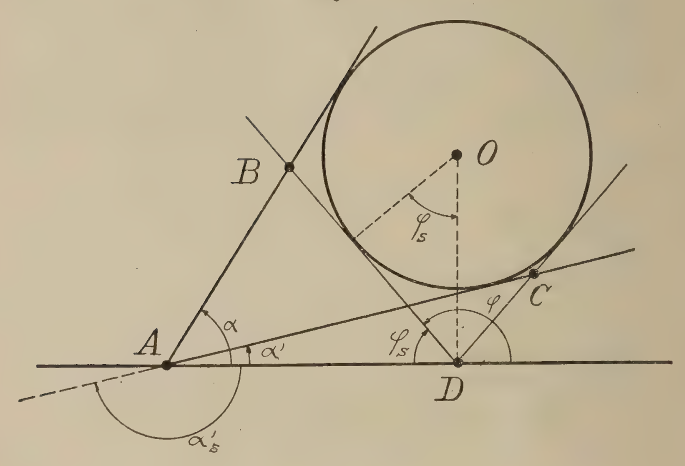
(3) $$\tang\frac{\alpha}{2} : \tang\frac{\alpha'}{2} = \tang^2\frac{\varphi}{2} = \frac{p+r}{p-r}.$$

Dans ce cas, les angles α et α'_s sont de signes con-

traires et nous pouvons écrire encore

$$\text{tang}\,\frac{\alpha}{2} + \text{tang}\,\frac{\alpha'_s}{2} = \frac{r+p}{r-p}. \tag{4}$$

Fig. 2.



La valeur $\frac{r+p}{r-p}$ s'appellera la *puissance absolue de la droite* par rapport au cercle fondamental. La puissance sera positive dans le premier cas, c'est-à-dire pour les droites sécantes, puisque α et α'_s seront de mêmes signes, tandis qu'elle sera négative dans le second cas, c'est-à-dire pour les droites extérieures, car α et α'_s seront de signes contraires.

Les cas limites seront :

$p = \infty$ et la puissance de la droite de l'infini sera -1;
$p = 2$ et la puissance d'une tangente sera $+\infty$;
$p = 0$ et la puissance d'un diamètre sera $+1$;

Les résultats (2) et (4) nous permettent maintenant de formuler le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donnés tous les couples de tangentes à un cercle que l'on peut mener par les divers points d'une droite quelconque du plan du cercle, les produits des tangentes des demi-angles de la première tangente et du prolongement de la seconde tangente de chaque couple avec la droite donnée est constant.*

Les résultats (1) et (2) auraient donné le corollaire suivant :

Corollaire. — *Étant donnés les mêmes couples de tangentes que précédemment, le quotient des tangentes des demi-angles de la première tangente et de la seconde avec la droite donnée est constant.*

Remarque. — A cause de la théorie des involutions qui suivra, l'énoncé du théorème est plus avantageux que celui du corollaire.

Si la puissance d'une droite doit être prise par rapport à plusieurs cercles, nous admettrons que le premier centre fixe l'orientation des signes des distances $\underline{p_i}$ ($i = 2, 3, 4, \ldots$). Suivant la position des autres centres, ces distances $\underline{p_i}$ peuvent devenir négatives.

Nous appellerons maintenant *puissance relative d'une droite* par rapport à un cercle l'expression $\frac{r+p}{r-p}$ dans laquelle $\underline{p}$ peut devenir négatif, suivant l'orientation fixée par un autre cercle jouant le rôle de premier cercle fondamental.

Si $\underline{p}$ reste positif, la puissance relative est égale à la puissance absolue et si $\underline{p}$ devient négatif, la puissance relative est égale à l'inverse de la puissance absolue; en effet, soit $\overline{p}$ la valeur absolue de $\underline{p}$; la puis-

sance absolue est $\frac{r+\underline{p}}{r-p}$, tandis que la puissance relative devient $\frac{r-\underline{p}}{r+p}$.

Ces observations nous conduisent aux théorèmes suivants, connus sous une autre forme :

Théorème I. — *L'enveloppe des droites de mêmes puissances relatives par rapport à deux cercles est le premier centre de similitude de ces cercles.*

Soient C_1 et C_2 les deux cercles et $\underline{d}$ une droite dont les puissances relatives par rapport à ces cercles sont égales. Nous aurons

$$\frac{r_1+p_1}{r_1-p_1}=\frac{r_2+p_2}{r_2-p_2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{r_1}{r_2}=-\frac{p_1}{p_2}.$$

Le rapport des rayons est considéré comme étant toujours positif; celui des distances p_1 et p_2 le sera également. Donc ces distances sont de mêmes signes et nous avons deux figures homothétiques directes avec rapport d'homothétie positif. La droite $\underline{d}$ passe ainsi par le premier centre de similitude.

Théorème II. — *L'enveloppe des droites de puissances relatives inverses par rapport à deux cercles est le deuxième centre de similitude de ces cercles.*

Soit $\underline{d'_1}$ une telle droite. Les puissances relatives nous donnent

$$\frac{r_1+p_1}{r_1-p_1}=\frac{r_2-p_2}{r_2+p_2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{r_1}{r_2}=-\frac{p_1}{p_2}.$$

Le rapport des rayons étant positif, celui des distances p_1 et p_2 doit devenir négatif à cause du premier signe — qui le précède. Ces distances seront de signes

contraires et nous aurons deux figures homothétiques inverses avec rapport d'homothétie négatif. La droite $\overline{d'}$ passera alors par le deuxième centre de similitude.

Par analogie avec la nomenclature employée dans la théorie de la puissance du point, nous appellerons les centres de similitude *centre radical principal* et *centre radical secondaire* des deux circonférences.

Théorème III. — *Étant donnés trois cercles dont les centres ne sont pas en ligne droite, les trois centres radicaux principaux sont en ligne droite et les trois centres radicaux secondaires forment un triangle dont chaque côté passe par un des centres radicaux principaux.*

Nous désignerons les centres radicaux principaux par S_1 pour C_2 et C_3, S_2 pour C_1 et C_3 et S_3 pour C_1 et C_2; les centres radicaux secondaires seront S'_1, S'_2 et S'_3 pour les mêmes groupes.

La droite $S_1 S_2$ est de *mêmes puissances relatives* pour les cercles $C_2 C_3$ et $C_1 C_3$; elle le sera donc pour les cercles C_1 et C_2 et elle passe, par conséquent, par S_3.

La droite $S'_1 S'_2$ est de *puissances relatives inverses* pour les cercles $C_2 C_3$ et $C_1 C_3$; elle sera donc de mêmes puissances relatives pour C_1 et C_2, et comme telle elle passera par S_3. Le raisonnement subsiste pour $S'_1 S'_3$ et $S'_2 S'_3$ qui passent respectivement par S_2 et S_1.

Nous appellerons maintenant $S_1 S_2 S_3$ l'*axe radical principal des trois cercles*, et les autres droites $S'_1 S'_2 S_3$, $S'_1 S_2 S'_3$, $S_1 S'_2 S'_3$ *axes radicaux secondaires des trois cercles*.

[I1]

NOTE SUR L'EXTRACTION RAPIDE DE CERTAINES RACINES EXACTES D'INDICE IMPAIR (1);

Par M. P. DELENS.

Nous avons indiqué, dans le numéro de juillet 1913 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, un procédé permettant de déterminer rapidement certaines racines exactes d'indice impair ayant seulement deux ou trois chiffres, grâce à l'emploi de diviseurs. Cette méthode, qui s'appliquait à une racine d'indice aussi élevé qu'on le voulait, avait l'inconvénient de ne pouvoir pas s'employer lorsque *l'indice impair de la racine était multiple de* 5, par suite de la composition du diviseur considéré $11 = 2 \times 5 + 1$, qui ne donnait pas des restes tous différents pour les puissances cinquièmes des onze premiers nombres.

Il me paraît utile de faire remarquer que, si l'on remplace le nombre 11 par le diviseur $17 = 2^4 + 1$, le cas d'exception indiqué tout à l'heure disparaît, de sorte que l'on peut ainsi extraire rapidement une racine exacte *d'indice impair quelconque*, et aussi élevé que l'on veut, ayant deux chiffres. Il suffit pour cela de former le tableau des restes de la division par 17 des puissances impaires des dix-sept premiers nombres jusqu'à la puissance 15 seulement, en tenant

(1) On peut consulter, pour plus de détails sur ce sujet, l'article publié sur la même question dans les numéros du 15 janvier et du 1er février 1917 du *Journal de Mathématiques élémentaires*.

compte ainsi du théorème de Fermat, ce qui se fait aisément, et de suivre ensuite une méthode semblable à celle indiquée pour le diviseur 11. Si la recherche des restes de la division par 17 est un peu moins simple que pour 11, elle peut être beaucoup facilitée par la séparation du nombre donné en tranches de quatre chiffres, et elle permet encore d'opérer rapidement sur de très grands nombres. C'est ainsi qu'on vérifiera sans peine que la racine 15e du nombre de 28 chiffres

$$7.244.150.201.408.990.671.659.859.968$$

est égale à 72.

Enfin on peut remarquer que l'on trouvera, sans rien changer au raisonnement ni au calcul, des racines impaires quelconques inférieures à $11 \times 17 = 187$, et pouvant par suite avoir plus de deux chiffres; il serait facile d'ailleurs d'étendre la méthode indiquée au cas de la recherche des racines admettant trois chiffres quelconques en opérant de la même façon que pour le diviseur 11, qu'on devra, du reste, toujours préférer quand l'indice de la racine ne sera pas multiple de 5.

CORRESPONDANCE.

M. d'Ocagne. — *Sur les droites orthoptiques de deux paraboles.* — Dans la très jolie étude, de forme purement géométrique, qu'il a donnée de la courbe orthoptique de deux coniques (*N. A.*, 1917, p. 1), M. Picardat a rencontré deux cas où l'orthoptique de deux paraboles devient une droite; ces deux cas sont

ceux où les deux paraboles, ayant même foyer, ont leurs axes soit confondus (l'orthoptique est alors la corde commune), soit rectangulaires (l'orthoptique est alors la tangente commune). Ces deux propositions se trouvaient déjà explicitement énoncées dans notre étude *sur un système spécial de coordonnées tangentielles et sur la transformation par tangentes orthogonales* (*N. A.*, 1901, p. 446), et, plus anciennement, quoique sous forme moins explicite, dans notre brochure *Coordonnées parallèles et axiales* (1885) p. 89 et 90, la première d'entre elles dans une autre Note des *N. A.* (1880, p. 267). Il convient toutefois de remarquer que l'élégante démonstration par laquelle M. Picardat les a obtenues a l'avantage de faire ressortir la façon dont elles dérivent du cas général concernant deux coniques quelconques.

M. V. Thébault. — *Sur le problème de Pappus généralisé.* — Ce problème, dans sa forme la plus générale, pourrait s'énoncer :

Étant donnés un angle quelconque $xOy = \omega$ *et un point* P *du plan, mener par ce point une droite qui intercepte sur les côtés de l'angle un segment* AB *de longueur donnée* l.

Posons $OP = d$. OP détermine avec Ox et Oy deux angles α et β. Sur AB comme corde, décrivons les segments de cercle AKB et AK'B capables des angles ω et $(180° - \omega)$. Soit R le rayon de ce cercle.

Les segments AM et MB de AK'B, respectivement capables des angles α et β, déterminent un point M dont le symétrique par rapport au diamètre perpendiculaire à AB est M'.

Les triangles semblables AOP et OM'B donnent

$$\frac{\text{OP}}{\text{OB}} = \frac{\text{OA}}{\text{OM}};$$

d'où

$$\text{OP.OM}' = \text{OA.OB} = 2\text{R.OO}',$$

soit

$$\frac{\text{OM}'}{\text{OO}'} = \frac{2\text{R}}{d} = \text{const.};$$

et O est déterminé par l'intersection d'un cercle et d'une conique de foyer M', de directrice AB, dont la nature est déterminée par le rapport $\frac{2\text{R}}{d}$ donné en fonction de l, ω et d.

Le cas particulier où $\alpha = \beta$ donne par suite une détermination géométrique de l'intersection de deux coniques dont l'une est un cercle passant par l'un des foyers de l'autre et ayant son centre sur l'axe.

(Le lecteur est prié de faire la figure.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

400.

(1857, p. 391.)

Soit u une fonction rationnelle et entière du degré n d'un nombre quelconque de variables x, y, z, ..., et soient du, d^2u, ..., d^nu, les différentielles successives qu'on obtient, mais en supposant que dx, dy, dz, ... sont constantes. Formons l'équation

$$t^n d^n u + nt^{n-1} d^{n-1} u + n(n-1) t^{n-2} d^{n-2} u + \ldots + n' u = 0.$$

Formons une fonction symétrique quelconque ration-

nelle et entière des différences des racines de cette équation; sa valeur est une fonction entière des coefficients $d^n u, d^{n-1} u, \ldots, du, u$, *et par conséquent une fonction de* $x, y, z, \ldots, dx, dy, dz$; *si l'on différentie cette dernière fonction en traitant* dx, dy, dz *comme des constantes, on trouve un résultat identiquement nul.*

Michael Roberts.

Solution

Par M. L. Poli.

Soit

$$p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0$$

une équation quelconque. Toute fonction symétrique Φ des différences des racines satisfait à l'équation différentielle

$$n p_0 \frac{d\Phi}{dp_1} + (n-1) p_1 \frac{d\Phi}{dp_2} + \ldots + p_{n-1} \frac{d\Phi}{dp_n} = 0.$$

(*Voir* les *Leçons d'Algèbre supérieur* de Salmon. Ne les ayant pas ici sous la main, je ne puis donner de références.)

Cette relation, appliquée à l'équation en t, donne

$$n\, d^n u \frac{d\Phi}{d(n\, d^{n-1} u)} + (n-1) n\, d^{n-1} u \frac{d\Phi}{d[n(n-1) d^{n-2}]} + \ldots$$
$$+ (n-\mu) n(n-1) \ldots (n-\mu+1) \frac{d\Phi}{d[n(n-1)\ldots(n-\mu) d^{n-\mu-1} u]} = 0$$

ou

$$(1) \quad d^n u \frac{d\Phi}{d(d^{n-1} u)} + d^{n-1} u \frac{d\Phi}{d(d^{n-2} u)} + \ldots + du \frac{d\Phi}{d(u)} = 0.$$

Il s'agit de prouver que $d\Phi = 0$, et comme Φ est fonction de $d^n u, d^{n-1} u, \ldots, du, u$, on a

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial (d^n u)} d(d^n u) + \frac{\partial \Phi}{\partial (d^{n-1} u)} d(d^{n-1} u) + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial u} d(u).$$

On peut l'écrire, puisqu'on a convenu de représenter par $d^\mu u$ les différentielles prises en considérant dx, dy comme constantes,

$$(2) \quad d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial (d^n u)} d^{n+1} u + \frac{\partial \Phi}{\partial (d^{n-1} u)} d^n u + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial u} du;$$

retranchant (1) de (2), on trouve

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial (d^n u)} d^{n+1} u = 0$$

car, d'après les conventions faites,

$$d^{n+1} u = 0 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

724.

(1865, p. 141; 1917, p. 119.)

Étant donnés un point quelconque O et la courbe d'intersection d'une sphère et d'une surface du second ordre, le cône qui a pour sommet le point O et pour directrice la courbe donnée coupe la sphère suivant une deuxième courbe située, comme la première, sur une infinité de surfaces du second ordre.

Cela posé, on demande de démontrer que les axes de chacune de ces nouvelles surfaces sont parallèles aux normales qu'on peut mener en O aux trois anallagmatiques du quatrième ordre, passant par ce point et qui ont pour focale la courbe donnée. MOUTARD.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient (S) la sphère, (Σ) la quadrique donnée, Γ leur biquadratique d'intersection, ω le centre de (S), Π le plan polaire de O par rapport à (S). Π coupe Oω en P, soit P_1 le milieu de Pω; menons par P_1 un plan Π_1 parallèle à Π. Les trois anallagmatiques ayant pour déférentes les trois quadriques $(S) + \lambda(\Sigma) = 0$ tangentes à Π_1 et pour sphère directrice (S) passeront par O, et si T_1, T_2, T_3 désignent les contacts de ces trois surfaces avec Π_1, les normales en O à ces trois anallagmatiques seront OT_1, OT_2, OT_3. Or le triangle $T_1T_2T_3$ est le triangle conjugué commun aux coniques sections de (S) et (Σ) par Π_1, la conique section de (S) n'est autre que la section par Π_1 du cône isotrope de sommet O, le trièdre $OT_1T_2T_3$ est donc trirectangle, fait du reste bien connu, les anallagmatiques considérées formant un système triple orthogonal. Si maintenant α, β, γ, δ désignent les points

d'intersection de Γ avec Π_1, les points à l'infini sur $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$, seront les points à l'infini de Γ_1, biquadratique qui constitue le reste de l'intersection de (S) avec le cône $O\Gamma$; $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$ seront les génératrices communes à tous les cônes de sommet O parallèles aux cônes asymptotiques de toutes les quadriques (Σ_1) passant par Γ_1; comme d'autre part les axes de ces quadriques sont parallèles aux arêtes du trièdre conjugué commun au cône isotrope de sommet O, et aux cônes parallèles aux cônes asymptotiques menés par O, ces axes seront parallèles à OT_1, OT_2, OT_3, ce qui démontre la proposition.

Autre solution, par M. M.-F. Egan.

729.

(1865, p. 142; 1917, p. 120.)

Les directions des axes de la section faite par le plan

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \lambda$$

dans la surface

$$\begin{aligned}Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,\end{aligned}$$

sont données par les intersections du plan

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$$

avec le cône

$$\begin{aligned}&(A'\cos^2\beta + A'\cos^2\alpha - 2B''\cos\alpha\cos\beta)(x^2\sin^2\beta - y^2\sin^2\alpha)\\ +&(A\cos^2\gamma + A''\cos^2\alpha - 2B'\cos\alpha\cos\gamma)(z^2\sin^2\alpha - x^2\sin^2\gamma)\\ +&(A'\cos^2\gamma + A''\cos^2\beta - 2B\cos\beta\cos\gamma)(y^2\sin^2\gamma - z^2\sin^2\beta) = 0.\end{aligned}$$

J.-J.-A. Mathieu.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

Pour que le cône

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 0$$

soit coupé par le plan

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = 0$$

suivant des parallèles aux axes de la section faite par ce même plan dans la quadrique considérée, il faut et il suffit que le plan donné coupe les cônes

$$\begin{gathered} L x^2 + M y^2 + N z^2 = 0, \\ A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' xz + 2 B'' xy = 0 \end{gathered}$$

et les cônes

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} L x^2 + M y^2 + N z^2 &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 0, \end{aligned} \right.$$

suivant des génératrices formant faisceau harmonique, d'où les deux conditions :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 = {} & L (A'' \cos^2\beta + A' \cos^2\gamma - 2B \cos\beta \cos\gamma) \\ & + M (A \cos^2\gamma + A'' \cos^2\alpha - 2B' \cos\alpha \cos\gamma) \\ & + N (A' \cos^2\alpha + A \cos^2\beta - 2B'' \cos\alpha \cos\beta) \\ 0 = {} & L(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) + M(\cos^2\gamma + \cos^2\alpha) \\ & + N(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette dernière peut s'écrire

$$(3) \qquad L \sin^2\alpha + M \sin^2\beta + N \sin^2\gamma = 0;$$

éliminons L, M, N entre les équations (1), (2), (3), il vient

$$\begin{vmatrix} \left\{ \begin{matrix} A'' \cos^2\beta + A' \cos^2\gamma \\ - 2B \cos\beta \cos\gamma \end{matrix} \right. & \left\{ \begin{matrix} A \cos^2\gamma + A'' \cos^2\alpha \\ - 2B' \cos\alpha \cos\gamma \end{matrix} \right. & \left\{ \begin{matrix} A' \cos^2\alpha + A \cos^2\beta \\ - 2B'' \cos\alpha \cos\beta \end{matrix} \right. \\ \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

Autres solutions, par MM. Dargenton et M. Faucheux.

772.

(1866, p. 384; 1916, p. 320.)

Le nombre des sommets d'une courbe algébrique est, en

général, donné par la formule

$$3i + 5c - 3d - 3p,$$

dans laquelle i, c, d représentent le nombre des points d'inflexion, la classe, le degré de la courbe donnée, et p le nombre des branches paraboliques. LAGUERRE.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Si l'on appelle *sommet d'une courbe* un point où le rayon de courbure est maximum ou minimum, c'est-à-dire un point où le cercle osculateur passe par quatre points consécutifs de la courbe, la formule de Laguerre est inexacte. En effet, à un sommet sur la courbe correspond un point de rebroussement de la développée; or Salmon montre (*Courbes planes*, p. 139) que le nombre des points de rebroussement de la développée est

$$R = 3i + 6c - 3d - 5p;$$

dans ce nombre sont compris les points de rebroussement à l'infini qui sont au nombre de $d - 2p$, ce qui porte le nombre des sommets à distance finie à

$$3i + 6c - 4d - 3p.$$

En admettant que la courbe ne passe pas par les points cycliques.

815.

(1867, p. 288; 1917, p. 157.)

Pour qu'une surface du second ordre soit transformée homologiquement en une sphère, il faut et il suffit: 1° *que le plan d'homologie soit parallèle à l'un des plans cycliques de la surface* (PONCELET, *Propriétés projectives*); 2° *que le centre d'homologie soit un quelconque des points de la conique focale situé dans le plan principal auquel le plan d'homologie est perpendiculaire.*

L. PAINVIN.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient O le centre d'homologie, P le plan d'homologie, P′ le plan qui correspond au plan de l'infini dans la transformation, le cône isotrope de sommet O coupe P′ suivant un cercle (C): pour qu'une quadrique Σ soit transformée en une sphère, il faut et il suffit qu'elle passe par (C), P′ et par suite P doit donc être parallèle à un plan cyclique Σ, de plus le cône isotrope de sommet O est alors bitangent à Σ, le cône circonscrit à Σ ayant pour sommet O est donc de révolution, et O est un foyer de Σ, se trouvant évidemment sur la focale dont le plan est perpendiculaire à P.

820 et 821.

(1867, p. 335, 336; 1916, p. 359, 360.)

820. *On coupe une surface du second degré* (S) *par un plan. On prend, sur la courbe d'intersection* C, *quatre points arbitraires* (non en ligne droite) *a*, *b*, *g*, *h et l'on mène en ces points les normales* A, B, G, H *à la surface* (S). *On construit le couple de droites* D *et* Δ *rencontrant à la fois ces quatre normales et l'on détermine la droite* I, *issue du point fixe i qui s'appuie sur* D *et* Δ.

Démontrer que, lorsqu'on fait varier la position des points a, b, g, h sur C, *les droites telles que* I *engendrent un plan.*

821. *Les données restant les mêmes, on construit comme précédemment le couple de droites* D, Δ. *On prend les traces de ces droites sur un plan fixe* (P); *on joint ces traces par une droite* M.

Démontrer que, lorsqu'on fait varier la position des points a, b, g, h sur C, *les droites telles que* M *passent par un point fixe.* MANNHEIM.

SOLUTIONS

Par M. R. BOUVAIST.

La conique C, supposée de grandeur invariable, peut se déplacer sur (S); son déplacement est bien déterminé, si cinq

de ses points sont assujettis à rester sur (S); il est d'ailleurs le même quels que soient ces cinq points. Il en résulte :

1° Que la droite I est située dans le plan normal à la trajectoire du point i, supposé entraîné dans le mouvement, et ceci quels que soient a, b, g, h;

2° Que la droite (M) passe par le foyer du plan (P) supposé entraîné, et ceci quels que soient a, b, g, h.

ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES [1].

1779 (**1897**, 388). — La ligne OMN rencontre les lignes AB, AC en M et N, de telle sorte qu'on a

$$OM^2.AN.AC = ON^2.AM.MB.$$

Déterminer O. W.-J. GREENSTREET.

1784 (**1897**, 579). — Si, à deux tétraèdres, dont les sommets sont les huit points communs à trois quadriques, on circonscrit deux quadriques bitangentes, dont une des coniques communes est dans un plan fixe, le plan de l'autre passe par un point fixe. E. DUPORCQ.

1785 (**1898**, 579). — Étant donné un arc de courbe plane, on considère la perpendiculaire abaissée du barycentre du périmètre de cet arc sur la corde qui en joint les extrémités; enveloppe des droites qui correspondent ainsi à des arcs de courbe parallèles à un arc de courbe donné. E. DUPORCQ.

1810 (**1898**, 484). — Démontrer que la fonction

$$\varphi(x) = x^{\frac{1}{4}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-n^2\pi x}$$

[1] La question 1510, réimprimée par erreur page 233, est résolue. La solution, de M. de Beires, a été publiée page 141.

croît constamment quand x varie de 1 à $+\infty$. Cette fonction satisfait à l'équation $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x)$. J. Franel.

1811 (**1898**, 484). — Soient a et b deux nombres entiers positifs premiers entre eux, n un nombre entier positif quelconque. Démontrer que le nombre des solutions entières, non négatives, de l'équation

$$ax + by = n$$

est égal à

$$E\left(n\frac{a'}{a}\right) + E\left(n\frac{b'}{b}\right) - n + 1;$$

a' est l'associé du nombre b suivant le module a, c'est-à-dire le nombre positif $< a$ satisfaisant à la congruence

$$ba' \equiv 1;$$

semblablement, b' est l'associé de a suivant le module b; enfin $E(x)$ désigne le plus grand nombre entier contenu dans la quantité x. J. Franel.

1820 (**1899**, 196). — Étant donnés, dans un même plan, un faisceau de coniques ayant entre elles un double contact, et une courbe algébrique C_m^n, on mène les tangentes communes à C_m^n et à chaque conique; déterminer le lieu des points de contact sur les coniques. V. Retali.

1821 (**1899**, 196). — Le lieu des sommets des paraboles tangentes à une conique centrale et ayant pour foyer un point fixe est une courbe unicursale du douzième ordre et de la dixième classe, ayant un point sextuple, avec deux coïncidences, en le point fixe et en chacun des points circulaires à l'infini; ayant, en outre, quatre points doubles ordinaires et six rebroussements. V. Retali.

1824 (**1899**, 340). — Démontrer qu'une fonction entière, à coefficients entiers, de la forme

$$(1) \qquad x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + 1,$$

qui ne s'annule pas pour $x = 1, -1$, ne peut avoir que les

diviseurs

$$x^2 + \alpha x - 1, \quad x^2 + \beta x + 1,$$

α étant un diviseur conforme aux nombres

$$1 + a_2 + a_4, \quad a_1 + a_3 + 1,$$

et β un diviseur commun aux nombres

$$1 - a_2 + a_4, \quad a_1 - a_3 + 1.$$

On voit que ce théorème donne une méthode simple pour décomposer une fonction (1) en ses facteurs irréductibles.

P. Burgatti.

1825 (**1899**, 340). — Les côtés BC, CA, AB du triangle ABC sont coupés en A′, B′, C′ par les bissectrices extérieures des angles opposés, et en A″, B″, C″ par la droite r sur laquelle se trouvent le centre du cercle inscrit et le centre du cercle circonscrit. Démontrer que les trois cercles AA′A″, BB′B″, CC′C″ se coupent sur la droite r.

G. Gallucci.

1826 (**1899**, 388). — Démontrer le développement suivant d'une fonction entière de z suivant les puissances croissantes du trinome $z^2 - bz - c$

$$\begin{aligned} f(z) = (z - \mathrm{B}z) &+ \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial c} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial c} z\right)(z^2 - bz - c) \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial c^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{B}}{\partial c^2} z\right)(z^2 - bz - c)^2 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{s!}\left(\frac{\partial^s \mathrm{A}}{\partial c^s} + \frac{\partial^s \mathrm{B}}{\partial c^s} z\right)(z^2 - bz - c)^s \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

où A et B sont fonctions de b et de c.

P. Burgatti.

1828 (**1899**, 388). — Douze points quelconques étant donnés dans un plan, il existe 411840 points, tels qu'en les joignant aux douze points donnés, on obtienne deux faisceaux en involution.

E. Dewulf.

1837 (**1900**, 96). — Les deux triangles ABC, A′B′C′ sont

homologiques des deux manières :

1° Centre O $\left| \begin{matrix} ABC \\ A'B'C' \end{matrix} \right|$, axe o;

2° Centre O′ $\left| \begin{matrix} ABC \\ C'B'A' \end{matrix} \right|$, axe o'.

Démontrer que si o passe par O′ : 1° o' passe par O; 2° les six points O, O′, ba', bc', $b'a$, $b'c$ sont les sommets d'un quadrilatère complet; 3° les six droites o, o', BA′, BC′, B′A, B′C sont les côtés d'un quadrangle complet; 4° le triangle diagonal du quadrangle, qui a pour sommets ba', bc', $b'a$, $b'c$, coïncide avec le trilatère diagonal du quadrilatère qui a pour côtés BA′, BC′, B′A, B′C. G. Gallucci.

1838 (**1900**, 144). — Chasles a démontré depuis longtemps qu'une courbe gauche du quatrième ordre à point double est tangente à deux directrices et à deux génératrices de tout hyperboloïde qui la contient, et que les quatre points de contact sont situés dans un même plan.

On demande de démontrer :

1° Que les plans osculateurs de la courbe en ces quatre points se rencontrent en un même point situé sur la droite d'intersection des plans osculateurs au point double;

2° Que ces mêmes plans rencontrent de nouveau la courbe en quatre points situés dans un même plan, qui sont les points de contact de la courbe avec deux directrices et deux génératrices d'un hyperboloïde qui la contient.

On peut encore énoncer le premier de ces théorèmes de la manière suivante :

Par un point pris sur la droite d'intersection des plans osculateurs au point double d'une courbe gauche du quatrième ordre, on peut mener à la courbe quatre plans osculateurs autres que ceux qui la touchent au point double; leurs points de contact sont situés dans un même plan, et les tangentes à la courbe en ces quatre points forment un quadrilatère gauche. E. Genty.

1847 (**1900**, 191). — Un fil homogène de longueur l, dont

le poids par unité de longueur est ϖ, est attaché par une de ses extrémités à un point fixe, tandis que l'extrémité libre porte un poids p.

Ce fil est soumis à l'action du vent soufflant horizontalement avec une intensité et dans une direction constantes. On admet que la pression du vent sur chaque élément infiniment petit du fil est proportionnelle au carré de la composante normale de la vitesse, et l'on demande de déterminer la forme d'équilibre du fil.

Examiner ce que devient cette forme d'équilibre dans le cas où $p = 0$. M. d'Ocagne.

1850 (**1900**, 239). — Soient, dans la circonférence circonscrite au triangle ABC, α, β, γ les points diamétralement opposés aux sommets A, B, C.

$\beta\gamma$ coupe AC et AB en l et l';
$\alpha\gamma$ » BA et BC en m et m';
$\alpha\beta$ » CB et CA en n et n'.

On mène lO_1, mO_1, nO_1 respectivement perpendiculaires à CO, AO, BO; de même l_1O_2, m_1O_2, n_1O_2 respectivement perpendiculaires à BO, CO, AO.

Démontrer que :

1° Les trois droites lO_1, mO_1, nO_1 se coupent en une même point O_1;

2° Les trois droites l_1O_2, m_1O_2, n_1O_2 se coupent en un même point O_2;

3° Les trois points O_1, O, O_2 sont en ligne droite, et

$$OO_1 = OO_2;$$

4° La droite O_1O_2 est parallèle à la droite de Brocard du triangle ABC. A. Droz-Farny.

[R¹a]

MOUVEMENTS PLANS DANS LESQUELS LA TANGENTE A UNE VITESSE ANGULAIRE CONSTANTE ;

Par M. Ch. MICHEL.

1. Je me propose d'établir un théorème très simple qui, je le crois du moins, n'a pas encore été remarqué. En voici l'énoncé :

Étant donnée une courbe plane Γ, *si un point* M *se meut sur cette courbe de façon que la direction de la tangente en* M *ait une vitesse angulaire constante, la droite qui porte le vecteur-accélération est symétrique par rapport à la normale de la droite qui joint le point* M *au centre de courbure correspondant de la développée de* Γ ; *et réciproquement. En outre, le vecteur-accélération est dans un rapport constant avec le vecteur qui a pour origine le point* M *et pour extrémité le symétrique par rapport à la normale du centre de courbure de la développée.*

Pour démontrer ce théorème, orientons le plan, puis la courbe Γ. Désignons par s l'abscisse curviligne du point M sur la courbe Γ, comptée à partir d'un certain point fixe de la courbe. Orientons d'autre part la tangente en M, dans le même sens que la courbe ; désignons par θ l'angle polaire de l'axe Δ ainsi défini sur la tangente, compté à partir d'un certain axe fixe du plan. Sur la normale en M à Γ, choisissons l'axe Δ' tel

que l'on ait $(\Delta, \Delta') = + \frac{\pi}{2}\cdot$ Soit I le centre de courbure correspondant au point M. On sait que, sur l'axe Δ', on a, en valeur absolue et en signe,

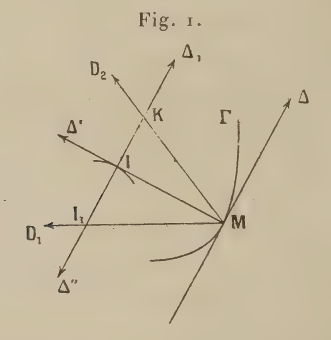
$$\mathrm{MI} = \mathrm{R} = \frac{ds}{d\theta}\cdot$$

Orientons la développée de Γ dans le même sens que sa tangente en I. Désignons par σ l'abscisse curviligne du point I, comptée à partir d'un certain point fixe de la développée ; on sait que l'on a

$$d\sigma = d\mathrm{R}.$$

Sur la normale en I à la développée, choisissons l'axe Δ'' tel que l'on ait $(\Delta', \Delta'') = + \frac{\pi}{2}\cdot$ Soit I_1 le centre de

Fig. 1.



courbure de la développée correspondant au point I. Sur l'axe Δ'', on a, en grandeur et en signe,

$$\mathrm{II}_1 = \frac{d\sigma}{d\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{d\mathrm{R}}{d\theta}\cdot$$

Par suite, sur l'axe Δ_1 opposé à Δ'', axe parallèle à Δ et de même sens que Δ, on a, en grandeur et en signe,

$$\mathrm{II}_1 = -\frac{d\mathrm{R}}{d\theta}\cdot$$

Si K est le symétrique de I_1 par rapport à I, on a, sur l'axe Δ_1 de même sens que Δ, en grandeur et en signe,

$$\mathrm{IK} = \frac{d\mathrm{R}}{d\theta}.$$

Cela posé, supposons que la vitesse angulaire de la direction de la tangente en M à Γ soit constante ; on a alors, t étant le temps,

$$\frac{d\theta}{dt} = \lambda = \text{const.}$$

Soient w_T et w_N les projections orthogonales du vecteur-accélération sur l'axe Δ et sur l'axe Δ'. On sait que l'on a, en grandeur et en signe,

$$w_\mathrm{T} = \frac{dv}{dt}, \qquad w_\mathrm{N} = \frac{v^2}{\mathrm{R}}.$$

Or, on a

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \lambda\mathrm{R}.$$

Par suite, on a

$$w_\mathrm{T} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \lambda^2\,\frac{d\mathrm{R}}{d\theta},$$

$$w_\mathrm{N} = \frac{v^2}{\mathrm{R}} = \lambda^2\mathrm{R}.$$

Les projections orthogonales du vecteur-accélération sur les axes Δ et Δ' sont donc proportionnelles aux projections orthogonales du vecteur MK sur les mêmes axes, le rapport de proportionnalité étant λ^2. Le vecteur-accélération est situé par suite sur la droite MK qui est symétrique par rapport à la tangente et à la normale en M à Γ de la droite qui joint le point M au centre de courbure I_1 de la développée ; en outre, il est dans le rapport constant λ^2 avec le vecteur MK.

En particulier, si la vitesse angulaire de la tangente

en M est égale à $+1$ ou à -1, l'extrémité du vecteur-accélération coïncide avec le point K.

Supposons, réciproquement, que le mouvement de M sur Γ soit tel que le vecteur-accélération de M soit constamment situé sur la droite MK. On a alors

$$w_T = \mu^2 \frac{dR}{d\theta}, \qquad w_N = \mu^2 R,$$

μ étant une certaine fonction de t. Il s'agit de montrer que μ est constant. Or, on a

$$w_T = \frac{v^2}{R} = \mu^2 R$$

et, par suite, $v = \pm \mu R$; nous pouvons choisir l'égalité $v = \mu R$. On en déduit

$$\frac{ds}{dt} = \mu R = \mu \frac{ds}{d\theta},$$

d'où

$$\frac{d\theta}{dt} = \mu.$$

D'autre part, on a

$$\mu^2 \frac{dR}{d\theta} = w_T = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\mu}{dt} + \mu \frac{dR}{dt},$$

et, comme on a

$$\mu \frac{dR}{d\theta} = \frac{dR}{dt},$$

on obtient finalement

$$R \frac{d\mu}{dt} = 0,$$

d'où il résulte bien que μ est constant. La vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ de la direction de la tangente en M est donc constante.

Remarque. — Supposons que la vitesse angulaire

de la direction de la tangente en M soit constante et égale à λ. Il en est de même de la vitesse angulaire de la direction de la tangente en I à la développée. En appliquant le théorème précédent, on voit que l'accélération du point I est située sur la droite qui joint le point I au symétrique K_1 du centre de courbure I_2 de la seconde développée par rapport au centre de courbure I_1 de la première développée et qu'elle est dans un rapport constant égal à λ^2 avec le vecteur IK_1 ; et ainsi de suite.

Exemple. — Supposons que la courbe Γ soit une cycloïde ; soit L la droite qui passe par les points de rebroussement. On sait que, dans ce cas, la droite MI_1 est constamment perpendiculaire à L et que la longueur MI_1 est constante et égale au double du diamètre du cercle générateur. La droite symétrique de MI_1 par rapport à la tangente et à la normale en M à la cycloïde est alors, comme on le voit bien facilement, la droite qui joint le point M au centre O du cercle générateur dans la position qui correspond au point M. On a ainsi le théorème suivant :

Si un point M *se meut sur une cycloïde de façon que la vitesse angulaire de la direction de la tangente en* M *soit constamment égale à un nombre fixe* λ, *le vecteur-accélération de* M *est situé sur la droite qui joint le point* M *au centre* O *du cercle générateur et il a une longueur constante, égale à* $4\lambda^2 a$, a *étant le rayon du cercle générateur. Réciproquement, si le point* M *se meut sur la cycloïde de façon que le vecteur-accélération soit constamment situé sur la droite* MO, *la vitesse angulaire de la direction de la tangente en* M *est constante.*

2. Supposons que le point M se déplace sur la courbe Γ de façon que la vitesse angulaire de la tangente en M soit constamment égale à 1. La vitesse du point M est alors un vecteur qui a pour projections orthogonales sur les axes Δ et Δ′ respectivement R et 0. La vitesse du centre de courbure I correspondant est en même temps un vecteur qui a pour projections orthogonales sur Δ et Δ′ respectivement 0 et $\frac{dR}{d\theta}$. Il en résulte que la vitesse du milieu P du rayon de courbure MI a pour projections orthogonales sur Δ et Δ′ respectivement $\frac{R}{2}$ et $\frac{1}{2}\frac{dR}{d\theta}$. D'autre part, le vecteur MI_1 a pour projections orthogonales sur Δ et Δ′ respectivement $-\frac{dR}{d\theta}$ et R. On reconnaît immédiatement que la vitesse de P est perpendiculaire à MI_1. On a ainsi le théorème suivant :

M *étant un point variable d'une courbe plane* Γ, *la tangente au lieu du milieu du rayon de courbure relatif à* M *est perpendiculaire à la droite qui joint le point* M *au centre de courbure correspondant de la développée.*

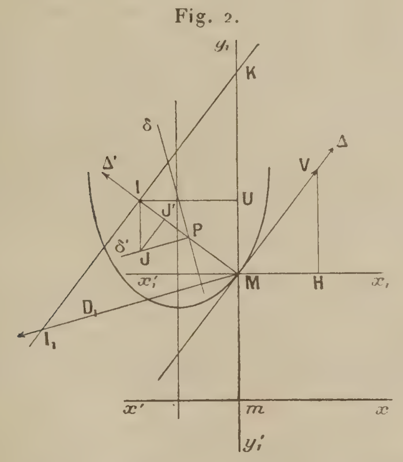
Soit, comme application, à trouver une courbe Γ telle que la droite qui joint un point M variable de cette courbe au centre de courbure correspondant de la développée ait une direction fixe. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la tangente au lieu du milieu du rayon de courbure de Γ ait une direction fixe; autrement dit, il faut et il suffit que le milieu du rayon de courbure de Γ décrive une droite. Il en résulte que la courbe Γ est une cycloïde.

3. Soit à déterminer, dans un plan, la trajectoire Γ

d'un point mobile M, sachant que la vitesse angulaire de la direction de la tangente est constante et que le mouvement de la projection orthogonale m de M sur un axe fixe $x'x$ est uniforme.

Dire que le mouvement de m est uniforme, c'est dire que le vecteur-accélération du point M est constamment perpendiculaire à $x'x$. Pour qu'il en soit ainsi, la vitesse angulaire de la direction de la tangente en M à Γ étant supposée constante, il faut et il suffit que *la droite symétrique par rapport à la tangente en* M *à* Γ *de la droite qui joint le point* M *au centre de courbure* I_1 *correspondant de la développée de* Γ *ait une direction fixe :* telle est la propriété caractéristique qui définit géométriquement la courbe Γ. Cette propriété rapproche la courbe Γ cherchée de la cycloïde.

Fig. 2.



Menons par M l'axe $x'_1 x_1$ parallèle à l'axe donné $x'x$, et de même sens, puis, le plan étant supposé orienté, menons par M l'axe $y'_1 y_1$ tel que l'on ait

$$(x_1 x'_1, y_1 y'_1) = +\frac{\pi}{2}.$$

Soit MV le vecteur-vitesse du point M ; projetons orthogonalement V en H sur $x'_1 x_1$. La vitesse du point m étant supposée constante, le vecteur MH est équipollent à un vecteur fixe et il a sur l'axe $x'_1 x_1$ une mesure algébrique constante a. Projetons I en U orthogonalement sur $y'_1 y_1$. En se servant des notations du paragraphe 1, on a, en grandeur et en signe,

$$\mathrm{MI} = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{MV}.$$

Par suite, les angles $(x_1 x'_1, \Delta)$ et $(y_1 y'_1, \Delta')$ étant égaux, on a, en grandeur et en signe,

$$\mathrm{MU} = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{MH} = \frac{a}{\lambda}.$$

La courbe cherchée est ainsi telle que la projection orthogonale sur un axe fixe du vecteur qui a pour origine le point M de cette courbe et pour extrémité le centre de courbure I correspondant soit constante. C'est donc la *chaînette d'égale résistance de Coriolis*.

Si l'on pose $\frac{a}{\lambda} = p$, cette courbe a pour équation cartésienne, par rapport à l'axe $x'x$ et à un axe $y'y$ directement perpendiculaire à $x'x$,

$$\frac{y - y_0}{p} = -\,\mathrm{L}\cos\frac{x - x_0}{p} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \frac{x - x_0}{p} < +\frac{\pi}{2}\right),$$

x_0 et y_0 étant les coordonnées du point où la tangente est parallèle à $x'x$.

4. Je terminerai par la démonstration d'une propriété de la chaînette d'égale résistance qui se rattache aux questions précédentes, et qui est la suivante :

P *étant le milieu du rayon de courbure* MI *de la chaînette d'égale résistance, le centre de courbure* J

du lieu de P est situé sur la parallèle à l'axe de la chaînette d'égale résistance menée par le point I.

Nous avons établi au paragraphe 2 que la normale au lieu de P est parallèle à la droite MI_1, I_1 étant le centre de courbure de la développée de la chaînette d'égale résistance. En reprenant les notations déjà employées, posons

$$(yy', \Delta') = \theta.$$

Sur la droite MI_1 qui est symétrique par rapport à Δ de la parallèle à l'axe de la chaînette menée par M, il existe un axe D_1 tel que l'on ait

$$(yy', D_1) = 2\theta.$$

Choisissons sur la normale au lieu de P l'axe δ' de même sens que Δ_1; on a ainsi

$$(yy', \delta') = 2\theta.$$

Puis, prenons sur la tangente au lieu de P l'axe δ tel que l'on ait $(\delta, \delta') = +\frac{\pi}{2}$ et, par suite,

$$(yy', \delta) = 2\theta - \frac{\pi}{2}.$$

Orientons la courbe décrite par P dans le même sens que sa tangente et désignons par σ_1 l'abscisse curviligne du point P comptée à partir d'une certaine origine fixe sur la courbe.

On a, d'après une formule bien connue,

$$\begin{aligned} d(\mathrm{PI}) &= d\sigma - ds_1 \cos(\Delta', \delta) \\ &= d\mathrm{R} - ds_1 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= d\mathrm{R} - ds_1 \sin\theta. \end{aligned}$$

Mais, P étant le milieu de MI, on a

$$d(\mathrm{PI}) = \frac{1}{2} d(\mathrm{MI}) = \frac{d\mathrm{R}}{2}.$$

On a donc finalement

$$ds_1 \sin\theta = \frac{d\mathrm{R}}{2}.$$

Cela posé, sur l'axe δ', on a, en grandeur et en signe,

$$\mathrm{PJ} = \frac{ds_1}{d(2\theta)} = \frac{ds_1}{2\,d\theta}$$

et, par suite,

$$\mathrm{PJ} = \frac{d\mathrm{R}}{4 \sin\theta\, d\theta}.$$

Soit J' la projection orthogonale de J sur Δ'. On a, sur Δ', en grandeur et en signe,

$$\begin{aligned}\mathrm{PJ'} &= \mathrm{PJ}\cos(\Delta', \delta') = \mathrm{PJ}\cos\theta \\ &= \frac{d\mathrm{R}}{4 \operatorname{tang}\theta\, d\theta}.\end{aligned}$$

Mais, sur l'axe Δ'', passant par I, directement perpendiculaire à Δ', on a

$$\mathrm{II}_1 = \frac{d\mathrm{R}}{d\theta}.$$

Il s'ensuit que l'on a, en se servant des projections orthogonales du vecteur MI_1 sur Δ' et sur Δ'',

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\dfrac{d\mathrm{R}}{d\theta}}{\mathrm{R}} = \frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}\,d\theta}.$$

On obtient, par suite, l'égalité

$$\mathrm{PJ'} = \frac{\mathrm{R}}{4},$$

qui montre que J' est le milieu de PI. La droite IJ est donc symétrique de la droite PJ par rapport à la paral-

lèle menée par J' à la tangente en M à Γ. La droite symétrique de MI_1 par rapport à cette tangente étant parallèle à l'axe de la courbe Γ, la droite IJ est aussi parallèle à cet axe, et la propriété énoncée est établie.

La chaînette d'égale résistance est ainsi telle que *la droite qui joint son centre de courbure à celui du lieu du milieu de son rayon de courbure ait une direction fixe*. Cette propriété appartient aussi à la cycloïde; dans le cas de la cycloïde, en effet, le milieu P du rayon de courbure MI décrit la droite L qui passe par les points de rebroussement, le centre de courbure J du lieu de P est à l'infini dans la direction des perpendiculaires à L, et la droite IJ est constamment parallèle à cette direction.

5. De ce qui précède il résulte aussi que, si la courbe Γ est une chaînette d'égale résistance, *le centre de courbure* J *du lieu de* P *est à égale distance de* P *et du centre de courbure* I *de la courbe* Γ.

Cette propriété est caractéristique de la chaînette d'égale résistance.

En effet, reprenons les notations du paragraphe 1; choisissons en outre sur MI_1 un axe D_1; sur MK il existe un axe D_2 tel que la normale en M à Γ soit la bissectrice de l'angle formé par D_1 et D_2. Posons

$$(D_2, D') = \alpha.$$

Choisissons sur la normale au lieu du milieu P de MI l'axe δ' de même sens que D_1 et sur la tangente en P à cette courbe l'axe δ tel que l'on ait $(\delta, \delta') = \frac{\pi}{2}$. Orientons le lieu de P dans le même sens que la tangente et désignons par σ_1 l'abscisse curviligne de P.

En vertu d'un calcul fait au paragraphe 4, on a

$$ds_1 \sin\alpha = \frac{dR}{2}.$$

Si θ désigne l'angle polaire de Δ par rapport à un axe fixe $x'x$, l'angle polaire de δ' est égal à $\theta + \frac{\pi}{2} + \alpha$; celui de δ est égal à $\theta + \alpha$. J étant le centre de courbure du lieu de P, on a, sur l'axe δ', en grandeur et en signe,

$$PJ = \frac{ds_1}{d(\theta + \alpha)}$$

et, par suite,

$$PJ = \frac{dR}{2(d\theta + d\alpha)\sin\alpha}.$$

Si l'on a $JP = JI$, la projection orthogonale J' de J sur MI est le milieu de PI ; on a donc, sur l'axe Δ',

$$PJ' = \frac{R}{4}.$$

Mais on a

$$PJ' = PJ\cos(\Delta', \delta') = PJ\cos\alpha.$$

Par suite, on a

$$\frac{dR}{2(d\theta + d\alpha)\tan\!g\,\alpha} = \frac{R}{4}.$$

Mais, sur l'axe Δ'' passant par I, directement perpendiculaire à Δ', on a

$$II_1 = \frac{dR}{d\theta}.$$

Il s'ensuit que l'on a, en se servant des projections orthogonales du vecteur MI_1 sur Δ' et sur Δ'',

$$\tan\!g\,\alpha = \frac{dR}{R\,d\theta}.$$

On obtient, par suite, l'égalité

$$\frac{d\theta}{d\theta + d\alpha} = \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire

$$d\alpha = d\theta,$$

d'où l'on déduit

$$\theta - \alpha = \text{const.}$$

Or, l'angle polaire de D_2 par rapport à l'axe fixe $x'x$ est égal à $\theta - \alpha + \frac{\pi}{2}$. On voit donc que la droite MK est parallèle à une droite fixe ; la courbe Γ est bien une chaînette d'égale résistance.

CERTIFICAT D'APTITUDE A L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES FILLES.

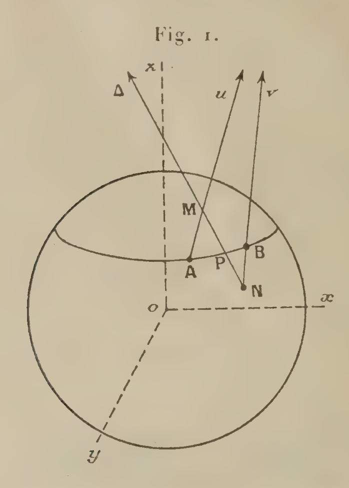
(DEUXIÈME PARTIE).

Session de 1917.

I. *On donne deux droites orientées u et v non situées dans un même plan, un point* A *sur la première, un point* B *sur la seconde; cette figure dépend, pour la grandeur, de quatre paramètres (longueur de la perpendiculaire commune* CD, ...). *Faire voir qu'il existe une sphère* Σ *tangente à la droite u au point* A, *à la droite v au point* B, *et que, si* O *est le centre de cette sphère, il existe une droite* Oz *orthogonale à la droite* AB *et faisant des angles égaux avec les directions u et v. On rapporte la figure à un trièdre trirectangle* Ox, Oy, Oz, *l'origine* O *et l'axe* Oz *étant le point* O *et la*

droite Oz *dont on vient de parler, le plan bissecteur du dièdre* (zOx, zOy) *étant perpendiculaire à la*

Fig. 1.



droite AB. *Soit* R *le rayon de la sphère* Σ, *et soient* a, b, c *les coordonnées du point* A; *soient* α, β, γ *les cosinus directeurs de la droite* u, *et* λ, μ, γ *ceux de la droite* v.

1° *Écrire les cinq relations qui lient les neuf quantités* R, a, b, c, α, β, γ, λ, μ.

2° *Exprimer les coordonnées* x', y', z' *d'un point* M *de la droite* u *en fonction de la quantité* $\overline{AM} = \rho$, *et les coordonnées* x'', y'', z'' *d'un point* N *de la droite* v *en fonction de la quantité* $\overline{BN} = \sigma$.

II. *On considère alors une droite variable* Δ *rencontrant les droites* u *et* v *en deux points* M *et* N *tels qu'on ait*

$$\overline{MN}^2 = (\overline{AM} - \overline{BN})^2.$$

1° *Établir la relation qui existe entre les quantités* $\overline{AM} = \rho$, $\overline{BN} = \sigma$. *Cette relation peut recevoir la forme*

$$(1) \qquad (1 - C)\rho\sigma - A\rho - B\sigma + D = 0,$$

avec

$$A = b\alpha + a\beta + c\gamma, \qquad B = a\lambda + b\mu + c\gamma,$$
$$C = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma^2, \qquad D = (a - b)^2.$$

Indiquer le sens géométrique des constantes C, A *et* B.

2° *Faire voir que la droite* Δ *reste tangente à la sphère* Σ. *Pour cela, après avoir écrit pour les coordonnées d'un point* P *de cette droite*

$$x = \frac{x' + kx''}{1 + k}, \qquad y = \frac{y' + ky''}{1 + k}, \qquad \ldots, \qquad k = -\frac{\overline{PM}}{\overline{PN}},$$

on formera l'équation qui donne les valeurs de k *correspondant aux points d'intersection de la droite avec la sphère, on introduira* ρ *et* σ *et l'on trouvera*

$$(k\sigma + \rho)^2 = 0.$$

De la valeur trouvée pour k *on déduira que, si* P *est le point de contact de la droite avec la sphère, on a, en orientant convenablement la droite* Δ,

$$\overline{PM} = \overline{AM}, \qquad \overline{PN} = \overline{BN}, \qquad \overline{NM} = \overline{AM} - \overline{BN}.$$

3° *Calculer la cote* z *du point* P *et en déduire le lieu de ce point. La droite* Δ *étant orientée comme on vient de dire, calculer le cosinus de l'angle de cette droite avec* Oz. *En déduire géométriquement le lieu de la droite* Δ.

III. *Soient* M_1 *la position du point* M *lorsque le*

point N *est à l'infini, et* N_2 *la position du point* N *lorsque le point* M *est à l'infini; soit* CD *la perpendiculaire commune aux deux droites* u *et* v; *on pose*

$$\rho_1 = \overline{AM_1}, \qquad \sigma_2 = \overline{BN_2}, \qquad \rho' = \overline{AC}, \qquad \sigma' = \overline{BD}.$$

Établir qu'on a

$$\rho_1 = \frac{B}{1-C}, \qquad \sigma_2 = \frac{A}{1-C}, \qquad \rho' - C\sigma' = A, \qquad \sigma' - C\rho' = B,$$

d'où

$$\rho' + \sigma' = \rho_1 + \sigma_2, \qquad \overline{CM_1} + \overline{DN_2} = 0.$$

Montrer qu'on peut, sans modifier les points M *et* N, *déplacer les points* A *et* B *et réaliser la condition* $\overline{AC} + \overline{BD} = 0$, *c'est-à-dire*

$$\rho' + \sigma' = 0, \qquad \rho_1 + \sigma_2 = 0, \qquad A + B = 0;$$

les points M_1 *et* N_2 *sont alors déterminés par les relations*

$$\frac{\rho_1}{\rho'} = \frac{\sigma_2}{\sigma'} = -\cot^2 \frac{1}{2}(u, v).$$

On peut, dans l'hypothèse précédente ($A + B = 0$), *changer simultanément* ρ *en* $-\sigma$ *et* σ *en* $-\rho$, *ce qui revient à changer* $\overline{CM}$ *en* $-\overline{DN}$ *et* $\overline{DN}$ *en* $-\overline{CM}$; *rendre compte de ce fait géométriquement.*

Déduire directement de la relation (1) *les conditions dans lesquelles cette relation est de la forme*

$$\rho\sigma = \text{const.}$$

SOLUTION

PAR UNE ABONNÉE.

Je prie le lecteur de se reporter à l'énoncé quand il y a lieu.

I. Les quatre paramètres dont dépend la figure sont la longueur de la perpendiculaire commune CD, l'angle des deux droites, les valeurs des quantités $\overline{\mathrm{CA}}$ et $\overline{\mathrm{DB}}$. Le centre de la sphère Σ est l'intersection des plans perpendiculaires aux droites u et v en A et B et du plan perpendiculaire à la droite AB en son milieu. Pour avoir la droite Oz on mène par le point O des parallèles aux droites orientées u et v, et l'on prend l'intersection du plan mené par la bissectrice de l'angle de ces parallèles perpendiculairement à leur plan avec le plan mené par O perpendiculairement à la droite AB. Les cinq relations qui lient *a priori* les neuf quantités R, ... sont, en observant que les coordonnées du point B sont b, a, c,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= \mathrm{R}^2,\\ a\alpha + b\beta + c\gamma &= 0,\\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1,\\ b\lambda + a\mu + c\gamma &= 0,\\ \lambda^2 + \mu^2 + \gamma^2 &= 1; \end{aligned}$$

si l'on voulait tirer λ et μ des deux dernières, on rencontrerait la solution étrangère $\lambda = \beta$, $\mu = \alpha$. Les formules demandées pour les points M et N sont

$$x' = a + \alpha\rho, \qquad \ldots, \qquad x'' = b + \lambda\sigma, \qquad \ldots.$$

II. 1° La relation $\overline{\mathrm{NM}}^2 = (\overline{\mathrm{AM}} - \overline{\mathrm{BN}})^2$ donne

$$\begin{aligned} &[a - b + (\alpha\rho - \lambda\sigma)]^2\\ &\quad + [(b-a) + (\beta\rho - \mu\sigma)]^2 + \gamma^2(\rho - \sigma)^2 = (\rho - \sigma)^2, \end{aligned}$$

ou, après suppression du facteur 2,

$$\begin{aligned} (a-b)^2 + (a-b)(\alpha\rho - \lambda\sigma - \beta\rho + \mu\sigma)&\\ + [1 - \alpha\lambda - \beta\mu - \gamma^2]\rho\sigma &= 0; \end{aligned}$$

le coefficient de ρ est

$$a\alpha - b\alpha - a\beta + b\beta \qquad \text{ou} \qquad -(b\alpha + a\beta + c\gamma),$$

et l'on a de même celui de σ. On a bien

$$(1) \qquad (1 - C)\rho\sigma - A\rho - B\sigma + D = 0,$$

les coefficients ayant les valeurs indiquées par l'énoncé. On a évidemment

$$A = R\cos(OB, u), \qquad B = R\cos(OA, v) \qquad C = \cos(u, v).$$

2° L'équation en k demandée est

$$(x' + kx'')^2 + (y' + ky'')^2 + (z' + kz'')^2 - (1 + k)^2 R^2 = 0.$$

Le coefficient de k^2 est

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 - R^2,$$

et, en tenant compte des relations écrites au début, il se réduit à σ^2; le terme indépendant est de même ρ^2; le coefficient de $2k$ est

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' - R^2,$$

ou

$$C\rho\sigma + A\rho + B\sigma - D,$$

ou $\rho\sigma$, d'après la relation (1). Cette équation est donc

$$(k\sigma + \rho)^2 = 0;$$

la valeur double trouvée pour k indique bien que la droite Δ est tangente à la sphère Σ. On a, d'ailleurs, pour le point P, d'après la signification de k,

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PN}} = \frac{\rho}{\sigma},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{PN}} = \frac{\overline{AM} - \overline{BN}}{\overline{NM}} = +1,$$

en tenant compte de la relation

$$\overline{\mathrm{NM}}^2 = (\overline{\mathrm{AM}} - \overline{\mathrm{BN}})^2$$

et en orientant convenablement la droite Δ; on a alors

$$\overline{\mathrm{NM}} = \overline{\mathrm{AM}} - \overline{\mathrm{BN}}.$$

3° On a, pour le point P,

$$z = \frac{z' + kz''}{1 + k} = \frac{\sigma z' - \rho z''}{\sigma - \rho} = \frac{\sigma(c + \gamma\rho) - \rho(c + \gamma\sigma)}{\sigma - \rho} = c;$$

le lieu du point P est la section de la sphère par le plan $z = c$.

Le cosinus de l'angle de la droite Δ avec Oz est

$$\frac{z' - z''}{\mathrm{NM}} = \frac{\gamma(\rho - \sigma)}{\rho - \sigma} = \gamma;$$

l'angle de Δ avec Oz est constant et égal à l'angle que les droites u et v font avec Oz.

Le lieu de la droite Δ est un hyperboloïde de révolution d'axe Oz, et la sphère Σ est inscrite à cet hyperboloïde. Les droites u et v sont deux génératrices du second système. On s'explique bien qu'on ait :

$$\overline{\mathrm{PM}} = \overline{\mathrm{AM}}, \qquad \overline{\mathrm{PN}} = \overline{\mathrm{BN}}, \qquad \overline{\mathrm{NM}} = \overline{\mathrm{PM}} - \overline{\mathrm{PN}} = \overline{\mathrm{AM}} - \overline{\mathrm{BN}}.$$

III. *a*. On a immédiatement, comme il est bien connu pour une relation homographique,

$$\rho_1 = \frac{\mathrm{B}}{1 - \mathrm{C}}, \qquad \sigma_2 = \frac{\mathrm{A}}{1 - \mathrm{C}};$$

la relation (1) donne

$$\overline{\mathrm{M_1 M}} \times \overline{\mathrm{N_2 N}} = \text{const.}$$

Soit CD la perpendiculaire commune aux deux

droites u et v, et posons

$$\rho' = \overline{AC}, \qquad \sigma' = \overline{BD};$$

les coordonnées des points C et D étant

$$\begin{array}{lll} a + \alpha\rho', & b + \beta\rho', & c + \gamma\rho', \\ b + \lambda\sigma', & \ldots\ldots., & \ldots\ldots., \end{array}$$

en écrivant que la droite CD est perpendiculaire à la droite u, on a

$$\alpha(x' - x'') + \ldots + \ldots = 0,$$

ou

$$(\alpha x' + \ldots) - (\alpha x'' + \ldots) = 0,$$

ou

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \rho' - (b\alpha + a\beta + c\gamma) - (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma^2)\sigma' = 0,$$

ou

$$\rho' - C\sigma' = A;$$

on a de même, en écrivant que la droite CD est perpendiculaire à la droite v,

$$\sigma' - C\rho' = B.$$

On a, en additionnant ces deux relations,

$$\rho' + \sigma' = \frac{A + B}{1 - C} = \rho_1 + \sigma_2,$$

d'où

$$(\rho_1 - \rho') + (\sigma_2 - \sigma') = 0,$$

ou

(2) $$\overline{CM_1} + \overline{DN_2} = 0;$$

ainsi *les deux points* M_1 *et* N_2 *ne sont pas quelconques, les deux vecteurs* (CM_1) *et* (DN_2) *ont des mesures opposées.*

b. La relation

$$\overline{NM} = \overline{AM} - \overline{BN}$$

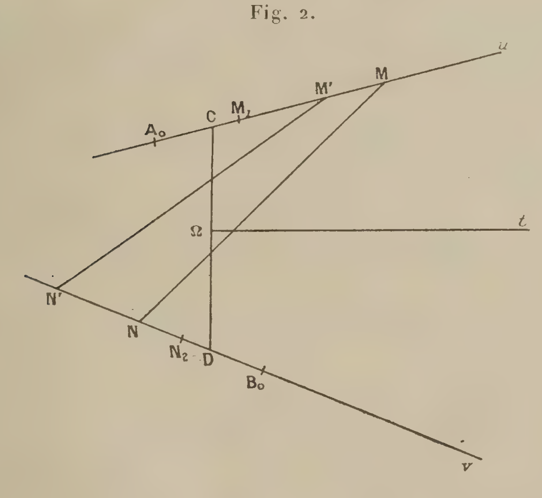
ne cessera pas d'être satisfaite *avec les mêmes points* M *et* N si l'on remplace les points primitifs A et B par deux points A′ et B′ obtenus en faisant subir aux premiers des déplacements égaux sur les droites orientées u et v; le choix de ces points n'introduit donc qu'un paramètre dans la question, et l'on s'explique ainsi que les points M_1 et N_2 dépendent l'un de l'autre.

En particulier, on peut prendre comme points A et B deux points spéciaux A_0 et B_0 tels qu'on ait

$$(3) \qquad \overline{A_0C} + \overline{B_0D} = 0,$$

comme sur la figure 2; il suffit de faire subir aux points primitifs A et B des déplacements égaux ayant pour

Fig. 2.



valeur commune $\frac{\overline{AC}+\overline{BD}}{2}$; on a alors $A_0M_1 + B_0N_2 = 0$. On a donc, avec ces points spéciaux A_0 et B_0,

$$\rho' + \sigma' = 0, \qquad \rho_1 + \sigma_2 = 0,$$

d'où

$$A + B = 0;$$

cela donne

$$\rho' = \frac{A}{1+C} = \frac{-B}{1-C}, \qquad \sigma' = \frac{B}{1+C} = \frac{-A}{1+C};$$

on a, pour déterminer les points M_1 et N_2, les formules

$$(4) \qquad \frac{\rho_1}{\rho'} = \frac{\sigma_2}{\sigma'} = -\frac{1+C}{1-C} = -\cot^2\frac{1}{2}(u, v),$$

qui ont un caractère géométrique.

Avec ces points spéciaux A_0, B_0, dont l'emploi ne particularise nullement le problème, la relation (1) devient

$$(5) \qquad (1-C)\rho\sigma - A(\rho - \sigma) + D = 0;$$

si elle est satisfaite pour les valeurs $\rho = p$, $\sigma = q$, elle l'est aussi pour les valeurs $\rho' = -q$, $\sigma' = -p$. Cela veut dire que si l'on a pour deux points M et N (*fig.* 2)

$$\overline{NM} = \overline{A_0 M} - \overline{B_0 N},$$

et si l'on prend

$$\overline{A_0 M'} = -\overline{B_0 N}, \qquad \overline{B_0 N'} = -\overline{A_0 M}$$

ou

$$\overline{A_0 C} + \overline{CM'} = -\overline{B_0 D} - \overline{DN'}, \qquad \overline{B_0 D} + \overline{DN'} = -\overline{A_0 C} - \overline{CM},$$

ou enfin, A_0 et B_0 disparaissant,

$$(6) \qquad \overline{CM'} = -\overline{DN}, \qquad \overline{DN'} = -\overline{CM},$$

on aura encore

$$\overline{N'M'} = \overline{AM'} - \overline{BN'};$$

et c'est là une propriété de la figure considérée en elle-même, indépendamment du choix particulier qu'on peut faire des points A et B. Cette propriété est

d'ailleurs évidente. On a d'une part, avec (6),

$$\overline{AM'} - \overline{BN'} = \overline{AM} - \overline{BN},$$

car cela équivaut à

$$\overline{AC} + \overline{CM'} - \overline{BD} - \overline{DN'} = \overline{AC} + \overline{CM} - \overline{BD} - \overline{DN},$$

ce qui a lieu. D'autre part, si l'on mène par le milieu Ω du segment CD des parallèles aux droites orientées u et v, et si Ωt est la bissectrice de l'angle de ces parallèles, on passe du segment MN au segment N′M′ par deux renversements successifs, l'un autour de Ωt, l'autre autour de CD; on a donc N′M′ = NM.

c. Voici maintenant un cas particulier. Si les points primitifs A et B sont tels qu'on ait $\overline{AC} = \overline{BD}$, les points spéciaux A_0 et B_0 sont les points C et D. Avec les points primitifs A et B, on a alors $\rho' = \sigma'$, $A = B$, et la relation (1) est involutive; avec les points spéciaux C et D, les coefficients A et B sont nuls et l'on a simplement

$$\rho\sigma = \text{const.}$$

On a ici, avec les points primitifs A et B,

$$\rho' = \frac{A}{1 - C} = \rho_1, \qquad \sigma' = \frac{B}{1 - C} = \sigma_2,$$

de sorte que M_1 est en C, N_2 est en D; cela est évident sur la relation fournie par les points spéciaux C et D.

A priori, si l'on veut que la relation (1) entre ρ et σ soit de la forme $\rho\sigma = \text{const.}$, il faut que A et B soient nuls, c'est-à-dire, d'après l'interprétation qu'on a donnée des valeurs de ces coefficients, il faut que la droite OB soit orthogonale à la droite u, que la droite OA soit orthogonale à la droite v; les directions OA et OB doivent donc se confondre l'une et

l'autre avec celle de la perpendiculaire commune CD, les droites OA et OB se confondent, et CD se confond avec la droite AOB qui rencontre u et v.

Il ne faut pas confondre la relation générale

$$\overline{M_1 M} \times \overline{N_2 N} = \text{const.}$$

avec la relation $\rho\sigma = \text{const.}$ relative au cas particulier dont on vient de s'occuper. Les points M_1 et N_2 ne forment généralement pas un couple de points pouvant être substitués aux points A et B; il n'en sera ainsi que si l'on a

$$\overline{AM_1} = \overline{BN_2},$$

c'est-à-dire

$$A = B, \qquad \rho' = \sigma', \qquad \overline{AC} = \overline{BD},$$

et c'est seulement alors qu'on pourra faire de $\overline{M_1 M}$ et de $\overline{N_2 N}$ un ρ et un σ.

Remarque. — Il serait facile de démontrer géométriquement que la droite Δ est tangente à la sphère Σ en introduisant le point P dès le début, de trouver le lieu du point P, sans oublier les réciproques, etc.

Si l'on considère deux positions Δ et Δ'' de la droite Δ, on a

$$\overline{NM} = \overline{AM} - \overline{BN},$$

$$\overline{N''M''} = \overline{AM''} - \overline{BN''}$$

et, par suite,

$$\overline{NM} - \overline{N''M''} = \overline{M''M} - \overline{N''N},$$

ou

$$\overline{MN} + \overline{NN''} + \overline{N''M''} + \overline{M''M} = 0,$$

dans le quadrilatère gauche MNN''M'' qui est circonscrit à la sphère Σ. La question se rattache ainsi à la question de Mathématiques élémentaires du concours pour l'agrégation des hommes en 1912.

CORRESPONDANCE.

M. **L. Poli.** — *Au sujet de la question* **1445** *de E. Cesàro* (1883, p. 240; 1916, p. 393). — L'énoncé comprend deux parties :

1° La somme des produits m à m des n premiers nombres naturels est divisible par tous les nombres premiers, compris entre $m+1$ et $n+2$ et supérieurs à $n-m$.

2° La même somme, diminuée de $1.2.3\ldots m$, est divisible par $n-m$ si ce nombre est premier.

La seconde partie doit renfermer une erreur d'énoncé puisqu'elle se trouve en défaut pour $n=5$, $m=2$,

$$(1.2+2.3+1.3+1.4+1.5+2.4+2.5+3.4+3.5+4.5)-1.2$$
$$=3.(2+1+4+5)+47 \quad \text{n'est pas divisible par } n-m=3.$$

Quant à la première partie, elle se déduit immédiatement de la question **791**, posé par Sylvester (1867, p. 49; 1917, p. 156), laquelle, du reste, n'est pas résolue [1].

---

[1] D'après cette observation de notre correspondant, il y a lieu de faire disparaître le n° 1445 de la liste des questions non résolues. (*Note de la Rédaction.*)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

848.

(1868, p. 137; 1916, p. 32.)

Soit une courbe gauche du quatrième ordre résultant de l'intersection de deux surfaces du second ordre. Il existe sur une telle courbe seize points où la torsion est nulle; si, par trois quelconques de ces points, on mène un plan, de deux choses l'une : ou ce plan passera par l'un des treize autres, ou il touchera la courbe en l'un des trois points choisis. LAGUERRE.

SOLUTION

Par M. F. GOMÈS TEXEIRA.

On peut démontrer cette proposition par la méthode employée par Clebsch pour étudier les biquadratiques gauches (*Journal de Crelle*, t. 63, 1864), basée sur le théorème suivant :

Les coordonnées d'une biquadratique gauche peuvent être exprimées par des fonctions doublement périodiques d'un paramètre n, et la condition pour qu'un plan passe par les points de cette courbe où n prend les valeurs n_1, n_2, n_3, n_4 *est*

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = c,$$

à des multiples des périodes près, c désignant une constante.

Les points où la torsion est nulle sont déterminés par l'équation

$$4n = c + h\omega_1 + k\omega_2,$$

où ω_1 et ω_2 désignent les périodes des fonctions considérées,

et où l'on doit remplacer h et k par tous les nombres entiers auxquels correspondent des points distincts de la courbe. Ces points correspondent donc aux valeurs 0, 1, 2, 3 de h et k, et par conséquent la courbe passe par 16 points de cette nature.

Soient n_1, n_2, n_3 les valeurs que n prend en trois de ces points. On a, à des multiples des périodes près,

$$n_1 + n_2 + n_3 = \frac{3}{4} c + \frac{m}{4} \omega_1 + \frac{n}{4} \omega_2,$$

m et n étant deux nombres entiers positifs, qui doivent prendre les valeurs 0, 1, 2, 3. Donc, si n_4 représente la valeur de n au point de torsion nulle où h et k prennent les valeurs $4 - m$ et $4 - n$ respectivement, on a, à des multiples des périodes près,

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = c,$$

où le nombre n_1 peut être différent des nombres n_1, n_2, n_3, ou coïncider avec l'un d'eux. Dans le premier cas, le plan passe par quatre points à torsion nulle. Dans le second cas, on a

$$n_1 + n_2 + 2n_3 = 0,$$

et le plan est tangent à la courbe considérée au point n_3.

Le théorème de Laguerre est donc démontré.

Je dois ajouter que l'éminent géomètre s'est occupé de l'application des fonctions doublement périodiques aux biquadratiques gauches dans un Mémoire publié dans le *Journal de Liouville* (1870). Il est donc probable qu'il a obtenu le théorème qu'il a énoncé dans les *Nouvelles annales* par la voie qu'on vient de voir.

852.

(1868, p. 138; 1917, p. 157.)

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les quatre racines d'une équation du quatrième degré forment un quadrilatère inscriptible. Touver la surface et le rayon de ce quadrilatère. DARBOUX.

SOLUTION
Par M. R. BOUVAIST.

La condition nécessaire et suffisante pour que quatre longueurs données soient les côtés d'un quadrilatère inscriptible est que chacune d'elles soit inférieure à la somme des trois autres.

Soit

$$x^4 - a_1 x^3 + a_2 x^2 - a_3 x + a_4 = 0$$

l'équation donnée.

On obtiendra les conditions cherchées en écrivant que l'équation

$$y^4 - 2 a_1 y^3 + 4 a_2 y^2 - 2 y(-a_1^3 + 4 a_1 a_2 - 4 a_3) \\ + 16 a_4 - 8 a_1 a_3 + 4 a_2 a_1^2 - a_1^4 = 0$$

a toutes ses racines positives, ce qui exige, d'après le théorème de Descartes, que

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad -a_1^3 + 4 a_1 a_2 - 4 a_3 > 0,$$
$$16 a_4 - 8 a_1 a_3 + 4 a_2 a_1^2 - a_1^4 > 0.$$

La surface du quadrilatère sera exprimée par la formule

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \frac{\sqrt{y_1 y_2 y_3 y_4}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{16 a_4 - 8 a_1 a_3 + 4 a_1^2 a_2 - a_1^4}}{4}$$

et l'on a, en désignant par R le rayon du cercle circonscrit,

$$16 R^2 S_1^2 = (ac + bd)(bc + ad)(cd + ab);$$

d'où

$$16 R^2 S^2 = \Sigma x_i^2 x_j^2 x_k^2 + x_1 x_2 x_3 x_4 \Sigma x_i^2 = a_3^2 - 4 a_2 a_4 + a_4 a_1^2,$$

d'où

$$R = \sqrt{\frac{a_3^2 - 4 a_2 a_4 + a_4 a_1^2}{16 a_4 - 8 a_1 a_3 + 4 a_1^2 a_2 - a_1^4}}.$$

861.

(1868, p. 190; 1917, p. 157.)

Soient (C) *un cercle de centre* O; OX *un diamètre quelconque. On prend sur* OX *une longueur* OM *sur laquelle, comme diamètre, on décrit un cercle* (D). *D'un point quelconque* A *de* (C) *on mène la droite* AO, *qui rencontre le cercle* (D) *en un point* B. *Avec* AB *comme rayon on décrit un cercle, dont le centre est* A; *on effectue la même construction en chacun des points de* (C). *Les cercles ainsi obtenus ont une enveloppe. Déterminer les sommets de cette courbe. Trouver la nature du lieu de ces sommets, lorsque* M *se déplace sur* OX. A. Ribaucour.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

Soient R le rayon de (C), $\overline{OM} = l$, posons $\widehat{\varphi} =$ angle $\widehat{\overline{OM}.\overline{OA}}$; le cercle variable aura pour équation, les axes étant $\overline{OX}$ et la perpendiculaire à OX en M,

$$(1)\quad x^2 + y^2 - 2x(R\cos\varphi - l) - 2Ry\sin\varphi + l^2\sin^2\varphi = 0,$$

il touche son enveloppe en ses points d'intersection avec la droite

$$(2)\qquad x\sin\varphi - y\cos\varphi + \frac{l^2}{R}\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Remarquons que cette droite s'obtient immédiatement, en prenant le point μ d'intersection de la demi-droite Mμ, telle que angle $\widehat{\overline{MX}.\overline{M\mu}} = \widehat{\Pi - \varphi}$, avec le cercle de centre M et de rayon $\frac{l^2}{R}$, la droite joignant les projections de μ sur les axes est la droite cherchée (2).

Cette droite coupera le cercle (1) en des points réels si l'on a

$$(l\cos\varphi - R)^2\left(1 - \frac{l^2\sin^2\varphi}{R^2}\right) \geqq 0.$$

Pour $l \leqq R$, cette inégalité est toujours vérifiée.

Si $l > R$, (1) et (2) ne se couperont en des points réels que pour les valeurs de φ comprises entre

$$o \quad \text{et} \quad \arcsin\frac{R}{l},$$

$$\Pi - \arcsin\frac{R}{l} \quad \text{et} \quad \Pi + \arcsin\frac{R}{l},$$

$$2\Pi - \arcsin\frac{R}{l} \quad \text{et} \quad o.$$

A chacune des valeurs limites $\sin\varphi = \pm\frac{R}{l}$ correspond un cercle (1) tangent à la droite (2), c'est-à-dire un cercle (1) ayant avec son enveloppe quatre points communs consécutifs, le point de contact est donc un sommet de l'enveloppe.

Les valeurs $\cos\varphi = \frac{R}{l}$ correspondent aux points d'intersection des cercles (C) et (D), ce sont les cercles (1) de rayon nul, foyers de l'enveloppe.

On voit immédiatement que les coordonnées des sommets de l'enveloppe sont données par les équations

$$x = \frac{R^2}{l},$$

$$y = \pm(l - R\cos\varphi);$$

quand l varie, ils décrivent la courbe

$$(xy - R^2)^2 + x^4 - R^2x^2 = o.$$

892.

(1868, p. 336.)

Une sphère variable coupe le plan d'une conique suivant un cercle fixe; la développable circonscrite à cette sphère et à cette conique a trois lignes doubles, outre la conique fixe. Chacune de ces lignes doubles, qui est une conique, décrit, lorsque la sphère varie, une surface du second degré ayant pour focale la conique donnée.

LAGUERRE.

Solution

Par M. R. Bricard.

1° Il résulte immédiatement de l'équation d'un système de quadriques homofocales que leurs coniques à l'infini forment un faisceau tangentiel contenant l'ombilicale. Par une transformation homographique, on déduit de là que :

Les quadriques d'un faisceau tangentiel contenant une conique C *ont pour traces sur le plan de celle-ci des coniques formant un faisceau tangentiel* (F).

Le faisceau tangentiel de quadriques contient, outre C, trois coniques dont les traces sur le plan de C sont les trois coniques-points de (F).

Ces points sont évidemment fixes, pour tous les faisceaux tangentiels déterminés par C et par les diverses quadriques qui ont pour trace sur le plan de C une conique fixe.

2° Soient C la conique donnée dans l'énoncé, S l'une des sphères variables, coupant le plan de C suivant un cercle fixe G, P le centre de S, C′ l'une des trois coniques, autres que C, du faisceau tangentiel (S, C), Σ l'ombilicale. Il résulte d'abord du 1° que C′ passe par deux points fixes situés dans le plan de C.

Soient

$$C = 0, \qquad C' = 0, \qquad \Sigma = 0, \qquad P = 0$$

les équations tangentielles respectives des coniques C et C′, de l'ombilicale Σ et du point P. La sphère S a pour équation tangentielle

$$P^2 + \alpha \Sigma = 0.$$

C, C′ et S appartenant au même faisceau tangentiel, on a l'identité

$$P^2 + \alpha \Sigma + \beta C + \gamma C' = 0,$$

α, β, γ désignant certaines constantes. Cette identité peut s'écrire

$$-\beta C = (P^2 + \gamma C') + \alpha \Sigma.$$

Or, $P^2 + \gamma C'$ est le premier membre de l'équation tangentielle d'une quadrique Q contenant C′. L'identité s'interprète donc ainsi : C appartient au faisceau tangentiel déterminé

par Q et Σ; autrement dit, C *est l'une des focales d'une quadrique* Q *contenant* C'.

Mais on a vu que C' passe par deux points fixes. Il en est donc de même de Q, quand S varie en satisfaisant aux condition de l'énoncé. *La quadrique* Q *est donc absolument fixe.* (Il peut y avoir jusqu'à trois quadriques ayant pour focale une conique donnée et qui passent par deux points donnés, mais, comme Q ne pourrait varier que d'une façon continue, Q est fixe).

C' a pour lieu la quadrique Q, et le théorème est démontré.

Autre solution par M. R. Bouvaist.

895 *bis.*

(1868, p. 557; 1917, p. 158.)

Si deux triangles sont homologiques, montrer qu'on peut faire passer par leurs six sommets une cubique telle que les tangentes aux trois sommets de chacun des triangles aillent concourir respectivement en un point situé sur la courbe. Sylvester.

Solution
Par M. R. Bouvaist.

Soient ABC, $\alpha\beta\gamma$ les deux triangles donnés, P le centre, Δ l'axe d'homologie; l'équation générale des cubiques Γ passant par A, B, C, α, β, γ, P est

$$\lambda(A\alpha,\ BC,\ \beta\gamma)+\mu(B\beta,\ AC,\ \alpha\gamma)+\nu(C\gamma,\ AB,\ \alpha\beta)=0;$$

si l'on se donne les valeurs de λ, μ, ν, la cubique Γ_1 correspondante coupera Δ en $P_1Q_1R_1$, sa transformée dans l'homologie donnée passera par ABC, $\alpha\beta\gamma$, $P_1Q_1R_1$ et P, elle coïncidera donc avec Γ_1. Si par suite nous déterminons, ce qui est évidemment toujours possible, λ, μ, ν de telle sorte que les tangentes à Γ en A, B, C concourent en M, sur Γ, les tangentes à Γ en α, β, γ concourront en M' intersection de Γ avec PM'.

989.

(1870, p. 192.)

Une conique passant par quatre points m, n et p, q, soit h le point de rencontre des droites mn et pq, et dési-

gnons respectivement par a et b les points où une tangente quelconque à la conique coupe les droites mn et pq.

Démontrer qu'on a la relation suivante :

$$\frac{\sqrt{am\,bp}}{\sqrt{hm\,hp}} + \frac{\sqrt{an\,bq}}{\sqrt{hn\,hq}} = C\sqrt{ah\,bh},$$

la lettre C désignant une constante. LAGUERRE.

SOLUTION
Par M. R. BRICARD.

Cette proposition repose sur une manière élégante d'écrire l'équation d'une conique, en mettant en évidence les abscisses et les ordonnées de ses tangentes parallèles aux axes de coordonnées.

Soient Ox, Oy deux axes de coordonnées (obliques en général). L'équation d'une conique quelconque inscrite au parallélogramme, formée par les droites

$$x - x_1 = 0, \qquad x - x_2 = 0,$$

d'une part, et

$$y - y_1 = 0, \qquad y - y_2 = 0,$$

de l'autre, peut s'écrire

$$(1) \qquad \sqrt{(x - x_1)(y - y_1)} + \sqrt{(x - x_2)(y - y_2)} = C,$$

C désignant une constante arbitraire. [On pourrait aussi bien prendre l'équation

$$\sqrt{(x - x_1)(y - y_2)} + \sqrt{(x - x_2)(y - y_1)} = C.]$$

En effet, on reconnaît tout de suite, en chassant les radicaux, que l'équation (1) représente une conique. En outre, si l'on fait $x = x_1$, y n'a que la valeur unique donnée par l'équation

$$(x_1 - x_2)(y - y_2) = C^2.$$

La conique est donc tangente à $x = x_1$. Elle est de même tangente aux autres côtés du parallélogramme indiqué. Enfin, l'équation contient une constante arbitraire, comme il convient.

Cela posé, prenons pour axes les droites ha et hb de l'énoncé et posons

$$ha = x, \qquad hm = x_1, \qquad hn = x_2,$$
$$hb = y, \qquad hp = y_1, \qquad hq = y_2.$$

L'équation de la droite ab est

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} - 1 = 0.$$

Comme cette droite enveloppe une conique, il existe entre $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ une relation du second degré. En outre, si le point a, par exemple, vient en m, les deux points b qui lui correspondent, en général, deviennent confondus. Les points n, p et q donnent lieu à des remarques semblables, et le tout peut se résumer ainsi : le point $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ décrit une conique inscrite dans le parallélogramme formé par les droites

$$X = \frac{1}{x_1}, \qquad X = \frac{1}{x_2}$$

d'une part, et

$$Y = \frac{1}{y_1}, \qquad Y = \frac{1}{y_2}$$

de l'autre. On a donc entre x et y la relation

$$\sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_1}\right)\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_1}\right)} + \sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_2}\right)\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_2}\right)} = C,$$

ou

$$\frac{\sqrt{(x_1 - x)(y_1 - y)}}{\sqrt{x_1 y_1}} + \frac{\sqrt{(x_2 - x)(y_2 - y)}}{\sqrt{x_2 y_2}} = C\sqrt{xy}.$$

Ce n'est autre chose que la relation à démontrer.

Autre solution par M. R. Bouvaist.

1004.

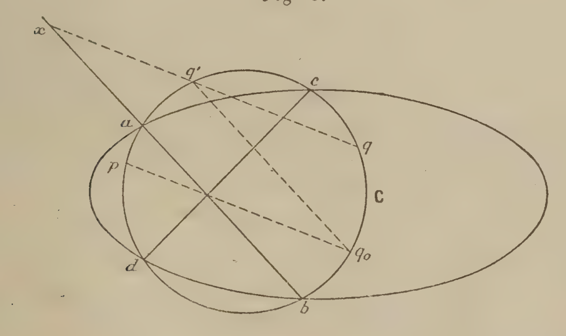
(1870, p. 432; 1916, p. 322.)

Par deux points fixes on mène un cercle variable; soient a et b deux des points où ce cercle coupe une conique fixe; le cercle variant, la droite ab enveloppe une courbe; construire géométriquement les points de contact de ab avec son enveloppe. LAGUERRE.

SOLUTION
Par M. R. BRICARD.

Soient p et q les deux points fixes par où passe le cercle variable C (ou, plus généralement, ses deux points caractéristiques, si le cercle varie dans les conditions les plus générales, en restant tangent à deux courbes), c et d ses deux autres points d'intersection avec la conique donnée, x le point caractéristique cherché de la droite ab (*fig.* 1). On peut faire les remarques suivantes :

Fig. 1.



1° Si, pour une position donnée du cercle C, deux des trois points p, q, x sont donnés, le troisième est déterminé d'une façon unique. Si donc l'un de ces points est donné, les deux autres se correspondent dans une certaine homographie.

2° Si c'est le point x qui est donné, l'homographie qui existe entre les points p et q du cercle C est évidemment involutive.

3° Si l'un des points p et q est confondu avec a, l'autre point

ayant sur C une position autre que b, le point x vient aussi se confondre avec a (puisque la droite ab passe alors par le point fixe a).

4° Si les points p et q sont, l'un en a, l'autre en b, le point x est indéterminé sur ab (puisque cette droite est alors fixe).

5° Si les points p et q sont, l'un en c, l'autre en d, le point x vient à l'infini sur ab; cela résulte immédiatement de ce théorème classique : quand un cercle varie en coupant une conique en deux points fixes, la droite qui joint ses deux autres points d'intersection avec la conique conserve une direction fixe.

Cela posé, joignons le point p au point de rencontre de ab et de cd, et soit q_0 le second point d'intersection de la droite obtenue et du cercle C. Les points p et q_0 se correspondent dans une involution qui contient les couples (c, d) et (a, b). Au premier de ces couples correspond le point à l'infini de ab (5°); au second couple correspond un point quelconque de ab (4°); donc, en particulier, le point à l'infini de ab. Donc au couple (p, q_0) correspond aussi (2°) le point à l'infini x_∞ de ab.

Soit maintenant q' le point du cercle C tel que q_0q' soit parallèle à ab. Le point p étant donné, et le point q occupant successivement les positions q_0, q, a, b, le point x occupera les positions correspondantes x_∞, x, a, b, correspondant homographiquement aux premières (1° et 3°). Or les droites $q'q_0$, $q'a$, $q'b$ passent respectivement par x_∞, a et b. Il faut donc que $q'q$ passe par x.

On aboutit en résumé à la construction suivante :

Déterminer sur C *le point* q_0, *tel que* pq_0 *passe par le point de rencontre de* ab *et de* cd, *puis le point* q' *tel que* q_0q' *soit parallèle à* ab. *La droite* $q'q$ *rencontre* ab *au point cherché* x.

Il est manifeste qu'on peut, dans cette construction, intervertir les rôles des points p et q.

Autres solutions par MM. R. Bouvaist et J. Ser.

1007.

(1870, p. 479 et 1917, p. 160).

Par chaque point d'une surface du second degré on peut faire passer deux cônes de révolution circonscrits à la surface. Ces cônes se coupent suivant deux coniques dont les tangentes au point considéré de la surface sont aussi tangentes aux sections circulaires de la surface qui passent par ce point. Les lignes de courbure qui passent au même point sont les bissectrices des angles formés par les deux tangentes. ÉMILE WEYR.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Cette proposition est manifestement *inexacte :* soit m la projection sur un des plans principaux d'un point M d'une surface du second ordre, la polaire de m par rapport à la section principale coupe la focale située dans le plan principal considéré en α et β, les cônes circonscrits à la surface ayant pour sommets α et β sont de révolution et passent par M. Ces deux cônes se couperont suivant deux courbes planes passant par Mm et dont les traces sur le plan principal seront conjuguées harmoniques des polaires de α et β par rapport à la section principale; ces traces ne seront pas également inclinées sur les axes de la section principale, par suite les plans des coniques communes aux deux cônes ne seront pas parallèles aux sections circulaires de la surface passant par M.

ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES.

1852 (**1900**, 288). — On considère un système articulé composé de sept tiges rigides dont les quatre premières forment un quadrilatère gauche ABCD; les trois autres ME, MF, MG relient un point M à trois points E, F, G, appartenant respectivement aux tiges AB, BC, CD et fixes sur ces tiges.

Les articulations qui existent aux points A, B, C, D, E, F, G, M sont réalisées par des points de Cardan.

Démontrer que, pendant toutes les déformations dont le système est susceptible, le point M reste à distance invariable d'un certain point de la tige DA, fixe sur cette tige. On peut, de la sorte, adjoindre au système une huitième tige sans introduire de liaison nouvelle. RAOUL BRICARD.

1854 (**1900**, 288). — 1° Étant placés les trois sommets A, B, C d'un triangle, les trois centres de ses cercles de Neuberg et les trois centres de ses cercles de Mackay, tracer par points, et au moyen de la règle seulement, *l'hyperbole* de Kiepert du triangle.

2° Étant placés les trois côtés a, b, c d'un triangle et les polaires du barycentre par rapport aux six coniques corrélatives des cercles de Neuberg et de Mackay, le barycentre étant origine de la corrélation, tracer par tangentes, et au moyen de la règle seulement, *la parabole* de Kiepert du triangle. L. RIPERT.

1856*bis* (**1900**, 383). — $pqrs\ldots tuvw$ est une permutation formée avec les quantités positives croissantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Quelles sont les permutations pour lesquelles la somme

$$pq+qr+rs+\ldots+tu+uv+vw$$

a : 1° la plus grande valeur; 2° la plus petite valeur?

E. LEMOINE.

1859 (**1900**, 383). — On a, dans un espace linéaire à n dimensions L_n, $(n+1)$ points $P_0, P_1, \ldots, P_n$; chercher le lieu géométrique de l'$(n+1)^{\text{èdre}}$ constitué par ces points, lorsque, P_0 étant fixe, l'hyperplan déterminé par les autres tourne autour d'un point fixe Q. H. PICCIOLI.

1884 (**1900**, 572). — Dans le plan, une courbe de troisième classe C et une cubique C′ pouvant se correspondre ainsi : l'un des trois systèmes de coniques S qui admettent C pour jacobienne tangentielle se compose des coniques inscrites à l'un des trois systèmes de quadrilatères inscrits à S′, et l'un des trois systèmes de coniques S′ qui admettent C′ pour jacobienne ordinaire se compose des coniques circonscrites à l'un

des trois systèmes de quadrangles circonscrits à C. On peut se donner C', par exemple, et il y a alors trois courbes C.

G. FONTENÉ.

1885 (**1900**, 572). — Les hexaèdres complets conjugués à quatre quadriques dépendent de deux paramètres.

Démontrer que les plans des faces sont osculateurs à une cubique gauche T, et que, si t est un paramètre qui correspond uniformément aux plans osculateurs de la courbe, les six valeurs de t pour les divers hexaèdres sont données par une équation de la forme

$$f(t) + \lambda\varphi(t) + \mu\psi(t) = 0,$$

λ et μ variant.

G. FONTENÉ.

1886 (**1900**, 573). — Si l'on inscrit dans une circonférence un quadrilatère quelconque $abcd$ et un rectangle $efgh$, dont les diagonales eg et fh sont perpendiculaires aux diagonales ac et bd du quadrilatère $abcd$, les quatre côtés des deux quadrilatères se coupent en seize points qui sont, de quatre en quatre, sur des lignes droites I, J, K, L. La polaire du point d'intersection de deux quelconques de ces quatre droites par rapport à la circonférence passe par l'intersection des deux autres droites.

L. KLUG.

1889 (**1900**, 573). — Lorsque deux triangles, l'un inscrit dans l'autre, sont involutifs, tout système de trois droites passant par les sommets du triangle circonscrit détermine, sur les côtés de l'inscrit, trois points qui forment six segments involutifs.

C. BLANC.

1890 (**1900**, 574). — Lorsque trois triangles sont homologiques deux à deux, si, dans le triangle formé par les trois axes d'homologie, un sommet est un centre d'homologie, chacun des deux autres sommets est aussi un centre d'homologie.

C. BLANC.

1892 (**1900**, 574). — Dans un pentagone, les cercles des neuf points, relatifs aux triangles formés par deux côtés consécutifs et une diagonale, se coupent, deux à deux, en cinq points qui sont sur un même cercle.

C. BLANC.

1910 (**1901**, 96). — On donne l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

On considère deux génératrices G et K du même système dont les pieds sur le plan de l'ellipse de gorge sont aux extrémités d'un même diamètre.

1° Trouver les équations de la droite Δ perpendiculaire commune à G et K.

2° Trouver la surface lieu de Δ (conoïde de Plucker).

3° Trouver sur cette surface le lieu des points tels que les plans tangents fassent un angle donné θ avec le plan de l'ellipse de gorge. Construire les projections de ce lieu sur les plans de coordonnées. Ch. Bioche.

1911 (**1901**, 144). — Étant donnés un tétraèdre $P_1P_2P_3P_4$ et un point P dans l'espace, on mène par ce point un rayon *g* que l'on projette orthogonalement sur les faces du tétraèdre. Montrer que le lieu de la droite *g*, telle que ses quatre projections appartiennent à une congruence linéaire singulière, c'est-à-dire admettent une transversale unique, à savoir le rayon *g* lui-même, est un cône du quatrième ordre contenant les vingt droites suivantes :

1° Les rayons qui vont du point P aux sommets du tétraèdre;

2° Les perpendiculaires abaissées du point P sur les faces;

3° Les perpendiculaires abaissées du point P sur les arêtes;

4° Les intersections des plans menés par le point P, d'une part perpendiculairement à une arête, et d'autre part par l'arête opposée.

Quand le point P se déplace dans l'espace, les génératrices du cône correspondant engendrent un complexe du quatrième ordre, qu'on pourrait, suivant la proposition de M. Neuberg, appeler *complexe de Simson*. J. Franel.

[L¹5b]

SUR LES PARABOLES QUI PASSENT PAR LES PIEDS DES NORMALES ISSUES D'UN POINT DONNÉ A UNE ELLIPSE [1];

Par E.-N. BARISIEN.

1. Soient l'ellipse d'équation

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

et (α, β) le point d'émission des normales. Les quatre pieds de ces normales sont à l'intersection de l'ellipse et de l'hyperbole équilatère

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0 \qquad (c^2 = a^2 - b^2),$$

dite d'*Apollonius*.

L'équation d'une conique quelconque passant par ces quatre pieds peut donc s'écrire

$$(1)\quad \lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) + c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0.$$

2. Les équations du centre de cette conique sont

$$2\lambda b^2x + c^2y + b^2\beta = 0,$$
$$2\lambda a^2y + c^2x - a^2\alpha = 0.$$

Si (α, β) reste fixe, le lieu de ce centre est donné par l'équation

$$\frac{b^2x}{a^2y} = \frac{c^2y + b^2\beta}{c^2x - a^2\alpha}$$

[1] Cet article est sans doute le dernier travail de notre regretté collaborateur. Il nous l'avait envoyé peu de temps avant sa mort et il n'a pu en revoir les épreuves.

ou

$$(2) \qquad c^2(b^2x^2 - a^2y^2) = a^2b^2(\alpha x + \beta y).$$

C'est donc une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux diagonales du rectangle des axes de l'ellipse donnée.

Les équations de ces asymptotes sont

$$bx \pm ay = \frac{ab(a\alpha \mp b\beta)}{2c^2}.$$

3. Nous allons étudier, parmi les coniques (1), les deux paraboles passant par les pieds des normales, que l'on pourrait nommer, par extension, *paraboles d'Apollonius*.

La conique (1) sera une parabole si

$$c^4 - 4\lambda^2a^2b^2 = 0.$$

D'où les deux valeurs de λ

$$\lambda = \pm\frac{c^2}{2ab}.$$

On a ainsi les équations des deux paraboles π et π_1 :

$$(3) \quad c^2(bx+ay)^2 + 2ab(b^2\beta x - a^2\alpha y) - a^2b^2c^2 = 0 \quad (\pi),$$

$$(4) \quad c^2(bx-ay)^2 - 2ab(b^2\beta x - a^2\alpha y) - a^2b^2c^2 = 0 \quad (\pi_1).$$

4. L'équation (3) peut se mettre sous la forme

$$(5) \qquad (bx+ay-k)^2 - 2\omega(ax-by-l) = 0.$$

La droite

$$(6) \qquad bx + ay - k = 0$$

est l'équation de l'axe de π, et

$$(7) \qquad ax - by - l = 0$$

l'équation de la tangente au sommet de π.

2ω est le paramètre de π, multiplié par $\sqrt{a^2+b^2}$.

En identifiant les équations (3) et (5), on a les relations

$$bk + a\omega = -\frac{ab^3\beta}{c^2},$$

$$ak - b\omega = \frac{a^3b\alpha}{c^2},$$

$$k^2 + \omega l = -a^2b^2.$$

Les deux premières donnent k et ω, la troisième donne ensuite l. On obtient ainsi :

$$k = \frac{ab(a^3\alpha - b^3\beta)}{a^4 - b^4}, \qquad \omega = -\frac{a^2b^2(a\alpha + b\beta)}{a^4 - b^4},$$

$$l = \frac{(a^3\alpha - b^3\beta)^2 + (a^4 - b^4)^2}{(a^4 - b^4)(a\alpha + b\beta)}.$$

Les équations (6) et (7) deviennent donc, pour l'axe de π,

$$(8) \qquad bx + ay = \frac{ab(a^3\alpha - b^3\beta)}{a^4 - b^4},$$

et pour la tangente au sommet de π,

$$(9) \qquad ax - by = \frac{(a^3\alpha - b^3\beta)^2 + (a^4 - b^4)^2}{(a^4 - b^4)(a\alpha + b\beta)}.$$

La résolution des équations (8) et (9) donnent les coordonnées du sommet de π.

A remarquer que les axes de π et π_1 ont des directions fixes, quel que soit le point (α, β); ces directions sont les diagonales du rectangle des axes de l'ellipse donnée.

On trouve de même, pour les équations de l'axe et de la tangente au sommet de la parabole π_1,

$$(10) \qquad bx - ay = \frac{ab(a^3\alpha + b^3\beta)}{a^4 - b^4},$$

$$(11) \qquad ax + by = \frac{(a^3\alpha + b^3\beta)^2 + (a^4 - b^4)^2}{(a^4 - b^4)(a\alpha - b\beta)}.$$

5. En résolvant (8) et (10) on a, pour les coordonnées du point de rencontre des axes de π et π_1,

$$(12)\qquad x = \frac{a^3 b \alpha}{a^4 - b^4}, \qquad y = -\frac{ab^3 \beta}{a^4 - b^4};$$

d'où il résulte

$$\frac{y}{x} = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{b^2}{a^2}.$$

6. En appelant (ξ, η) le foyer de la parabole π, et

$$(13)\qquad ax - by - h = 0$$

l'équation de la directrice, l'équation (3) peut s'écrire

$$(14)\qquad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \frac{(ax - by - h)^2}{a^2 + b^2},$$

ou

$$(bx + ay)^2 - 2x[\xi(a^2 + b^2) - ah]$$
$$- 2y[\eta(a^2 + b^2) + bh] + (\xi^2 + \eta^2)(a^2 + b^2) = h^2 = 0.$$

En identifiant cette équation avec (3), on a

$$(15)\qquad \xi(a^2 + b^2) - ah = -\frac{ab^3\beta}{c^2},$$

$$(16)\qquad \eta(a^2 + b^2) + bh = \frac{a^3 b \alpha}{c^2},$$

$$(17)\qquad (\xi^2 + \eta^2)(a^2 + b^2) - h^2 = -a^2 b^2.$$

(15) et (16) s'écrivent

$$\xi(a^2 + b^2) = \quad ah - \frac{ab^3\beta}{c^2},$$

$$\eta(a^2 + b^2) = -bh + \frac{a^3 b \alpha}{c^2}.$$

Élevons au carré et ajoutons ces deux équations, il vient

$$(\xi^2 + \eta^2)(a^2 + b^2)^2$$
$$= (a^2 + b^2)h^2 + \frac{a^2 b^2(a^4\alpha^2 + b^4\beta^2)}{c^4} - \frac{2a^2 b^2 h(a\alpha + b\beta)}{c^2}$$

ou

$$(a^2+b^2)\left[(\xi^2+\eta^2)(a^2+b^2)-h^2\right] = \frac{a^2b^2(a^4\alpha^2+b^4\beta^2)}{c^4} - \frac{2a^2b^2h(a\alpha+b\beta)}{c^2}.$$

En tenant compte de (17), cette équation devient

$$-(a^2+b^2) = \frac{a^4\alpha^2+b^4\beta^2}{c^4} - \frac{2h(a\alpha+b\beta)}{c^2},$$

d'où

$$(18) \qquad h = \frac{a^4\alpha^2+b^4\beta^2+(a^2+b^2)^4}{2c^2(a\alpha+b\beta)}.$$

En portant cette valeur de h dans (15) et (16), on obtient les coordonnées ξ, η du foyer de π :

$$(19) \qquad \xi = \frac{a}{a^4-b^4}\left[\frac{a^4\alpha^2+b^4\beta^2+(a^2+b^2)c^4}{2(a\alpha+b\beta)} - b^3\beta\right],$$

$$(20) \qquad \eta = \frac{b}{a^4-b^4}\left[-\frac{a^4\alpha^2+b^4\beta^2+(a^2+b^2)c^4}{2(a\alpha+b\beta)} + a^3\alpha\right].$$

L'équation (13) de la directrice est

$$(21) \qquad ax-by = \frac{a^4\alpha^2+b^4\beta^2+(a^2+b^2)c^4}{2c^2(a\alpha+b\beta)}.$$

En résolvant (8) et (9), on aurait les coordonnées du pied de la directrice.

On trouve de même, pour les coordonnées du foyer (ξ_1, η_1) de la parabole π_1,

$$(22) \qquad \xi_1 = \frac{a}{a^4-b^4}\left[\frac{a^4\alpha^2+b^4\beta^2+(a^2+b^2)c^4}{2(a\alpha+b\beta)} + b^3\beta\right],$$

$$(23) \qquad \eta_1 = \frac{b}{a^4-b^4}\left[\frac{a^4\alpha^2+b^4\beta^2+(a^2+b^2)c^4}{2(a\alpha-b\beta)} - a^3\alpha\right].$$

La directrice de π_1 a pour équation

$$(24) \qquad ax+by = \frac{a^4\alpha^2+b^4\beta^2-(a^2+b^2)c^4}{2c^2(a\alpha-b\beta)}.$$

7. La corde focale principale a pour équation, dans π,

$$a(x-\xi)-b(y-\eta)=0$$

ou

$$(25)\quad ax-by=\frac{a^4\alpha^2+b^4\beta^2+(a^4+b^2)c^4}{2c^2(a\alpha+b\beta)}-\frac{a^2b^2(a\alpha-b\beta)}{a^4-b^4}.$$

L'équation de la corde focale de π_1 est aussi

$$(26)\quad ax+by=\frac{a^4\alpha^2+b^4\beta^2+(a^2+b^2)c^4}{2c^2(a\alpha-b\beta)}-\frac{a^2b^2(a\alpha-b\beta)}{a^4-b^4}.$$

8. *Cas où le point* (α, β) *est sur l'ellipse.* — Alors

$$\alpha=a\cos\varphi.\qquad \beta=b\sin\varphi.$$

Les équations des paraboles π et π_1 sont

$$c^2(bx+ay)^2+2ab(b^3x\sin\varphi-a^3y\cos\varphi)-a^2b^2c^2=0,$$
$$c^2(bx-ay)^2-2ab(b^3x\sin\varphi-a^3y\cos\varphi)-a^2b^2c^2=0.$$

La parabole π enveloppe la quartique

$$(27)\quad c^4[(bx+ay)^2-a^2b^2]^2=4a^2b^2(b^6x^2+a^6y^2).$$

La parabole π_1 enveloppe la quartique

$$(28)\quad c^4[(bx-ay)^2-a^2b^2]^2=4a^2b^2(b^6x^2+a^6y^2).$$

L'axe de π a pour équation

$$bx+ay=\frac{ab(a^4\cos\varphi-b^4\sin\varphi)}{a^4-b^4}.$$

Celui de π_1 s'écrit

$$bx-ay=\frac{ab(a^4\cos\varphi+b^4\sin\varphi)}{a^4-b^4}.$$

Le point de rencontre de ces deux axes a pour coordonnées

$$(29)\qquad x=\frac{a^4b\cos\varphi}{a^4-b^4},\qquad y=-\frac{ab^4\sin\varphi}{a^4-b^4}.$$

Le lieu de ce point est l'ellipse

(30) $$\frac{x^2}{a^6} + \frac{y^2}{b^6} = \frac{a^2 b^2}{(a^4 - b^4)^2} = 0.$$

9. *Si* (α, β) *décrit l'ellipse, la droite qui joint ce point au point de rencontre des axes de* π *et* π_1 *est normale à une ellipse fixe.*

L'équation de cette droite qui joint le point (α, β) au point (29) est

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a\cos\varphi & b\sin\varphi & 1 \\ a^4 b\cos\varphi & -ab^4\sin\varphi & a^4 - b^4 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$b[a(a^3 + b^3) - b^4]\,x\sin\varphi$$
$$+ a[b(a^3 + b^3) - a^4]\,y\cos\varphi = a^2 b^2 (a^2 + b^2)\sin\varphi\cos\varphi.$$

On peut identifier cette équation avec la suivante :

$$\mathrm{A}x\sin\varphi - \mathrm{B}y\cos\varphi = (\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2)\sin\varphi\cos\varphi,$$

qui est la normale à l'ellipse

$$\mathrm{B}^2 x^2 + \mathrm{A}^2 y^2 - \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2 = 0.$$

L'identification donne

$$\frac{\mathrm{A}}{b(a^4 + ab^3 - b^4)} = \frac{\mathrm{B}}{a(a^4 - a^3 b - b^4)} = \frac{\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2}{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}$$
$$= \frac{\sqrt{\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2}}{\sqrt{b^2(a^4 + ab^3 - b^4)^2 - a^2(a^4 - a^3 b - b^4)^2}},$$

d'où

$$\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2 = \frac{a^4 b^4 (a^2 + b^2)^2}{b^2(a^4 + ab^3 - b^4)^2 - a^2(a^4 - a^3 b - b^4)^2},$$

$$\mathrm{A} = \frac{a^2 b^3 (a^2 + b^2)(a^4 + ab^3 - b^4)}{b^2(a^4 + ab^3 - b^4)^2 - a^2(a^4 - a^3 b - b^4)^2},$$

$$\mathrm{B} = \frac{a^3 b^2 (a^2 + b^2)(a^4 - a^3 b - b^4)}{b^2(a^4 + ab^3 - b^4)^2 - a^2(a^4 - a^3 b - b^4)^2}.$$

La droite précitée est donc normale à l'équation

$$\frac{x^2}{b^2(a^4+ab^3-b^4)^2}+\frac{y^2}{a^2(a^4-ab^3-b^4)^2}$$
$$=\frac{a^4b^4(a^2+b^2)^2}{[b^2(a^4+ab^3-b^4)^2-a^2(a^4-a^3b-b^4)^2]^2}.$$

On peut dire aussi que cette droite a pour enveloppe la développée de cette ellipse, soit

$$(\mathrm{A}x)^{\frac{2}{3}}+(\mathrm{B}y)^{\frac{2}{3}}=(\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2)^{\frac{2}{3}}$$

ou

$$[bx(a^4+ab^3-b^4)]^{\frac{2}{3}}$$
$$+[ay(a^4-a^3b-b^4)]^{\frac{2}{3}}=[a^2b^2(a^2+b^2)]^{\frac{2}{3}}.$$

$[\mathrm{L}^1 3\mathrm{d}][\mathrm{L}^1 7][\mathrm{L}^2]$

FOYERS ET ASYMPTOTES DES CONIQUES ET QUADRIQUES;

Par M. M.-F. EGAN.

I.

Une conique est uniquement déterminée lorsqu'on se donne le centre, les directions des axes, un point sur la courbe et la tangente en ce point.

Soit une hyperbole S, de centre O et de foyers F, F', et soient A, A' les points où la tangente à S en un point M rencontre les asymptotes. D'après ce qu'on vient de dire, l'hyperbole Σ, ayant ses foyers en A et A' et passant par O, est la seule conique ayant pour axes la tangente et la normale à S au point M, et tangente en O à FF'. Un raisonnement tout pareil identifie S

avec une conique ayant ses foyers sur les asymptotes de Σ ; ces asymptotes sont donc MF et MF′.

Voici quelques autres propriétés du système :

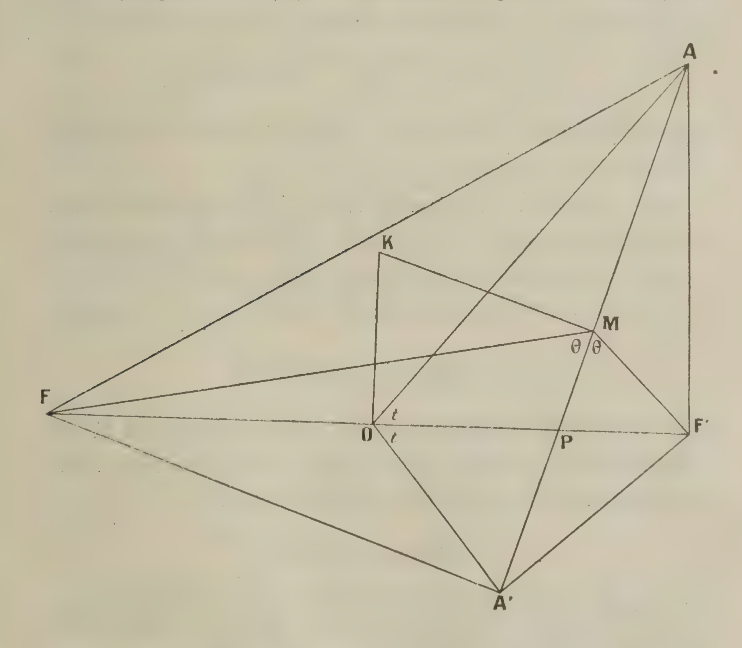
(1) *Les quatre foyers* F, F′, A, A′ *sont sur une même circonférence* C.

(2) *Les quatre asymptotes touchent un cercle* C′, *concentrique à* C.

(3) *Le quadrilatère* AFA′F′ *est circonscrit à une ellipse ayant ses foyers en* O *et* M.

(4) *Lorsque* M *se déplace sur* S, *la distance perpendiculaire de* A *ou* A′ *à* MF *reste constante.*

La proposition (2) a été énoncée par M. d'Ocagne



dans les *Nouvelles Annales,* sous une forme un peu différente (1915, p. 532, question 2275).

Désignons par $2t$ et 2θ les angles AOA′ et FMF′, et posons $FF' = 2c$, $AA' = 2\gamma$.

On a

$$OA.OA' = OF^2, \qquad \widehat{FOA} = \widehat{FOA'},$$

donc

$$\widehat{FA'O} = \widehat{OFA}, \qquad \widehat{AFA'} = \widehat{OFA'} + \widehat{FA'O} = t.$$

On trouve de même que l'angle $AF'A' = \pi - t$, donc le quadrilatère AFA′F′ est cyclique. Soit R le rayon du cercle circonscrit (C). On a

$$2R = AA' : \sin AFA' = 2\gamma : \sin t.$$

Or, t étant le demi-angle des asymptotes de S, si l'on désigne par b le demi-axe conjugué de cette hyperbole, on a

$$\sin t = b : c \qquad \text{et} \qquad R = c\gamma : b.$$

On en déduit que les axes conjugués de S et de Σ ont la même longueur $2b$.

Le centre K du cercle C est à l'intersection des perpendiculaires à FF′ et AA′ en O et M respectivement. Pour démontrer la proposition (2), calculons la distance perpendiculaire R′ de K à OA, par exemple. On a

$$R' = OK \cos t = R \cos\theta \cos t.$$

On trouverait évidemment la même valeur de R′ en remplaçant OA par l'une quelconque des trois autres asymptotes. Remarquons en passant que

$$R' : R = \cos(AA', FF').$$

En effet, la projection sur FF′ de A′A est la différence des projections de OA et OA′; on a donc

$$2\gamma \cos APF' = (OA - OA') \cos t.$$

L'excentricité de Σ est égale à séc θ, on a donc

$$OA - OA' = 2\gamma \cos\theta,$$

donc

$$\cos APF' = \cos t \cos\theta.$$

Les triangles FOA, A'F'A sont équiangulaires, donc les angles OAF, MAF' sont égaux. Il s'ensuit que l'ellipse E, ayant ses foyers en O et M, et touchant AF, touche AF'. On établit de même (en tenant compte des valeurs θ, $\pi - \theta$ des angles FAF', FA'F') que cette ellipse touche les autres côtés du quadrilatère.

Calculons les demi-axes a' et b' de l'ellipse E. Soient p et p' les perpendiculaires de O et M sur AF; on a

$$b'^2 = pp' = OF.MA.\sin OFA \sin MAF = c\gamma.AF'.A'F : 4R^2.$$

Or, les triangles AFA', AOF' sont équiangulaires, donc

$$AF'.A'F = FO.AA' = 2c\gamma,$$
$$b'^2 = c^2\gamma^2 : 2R^2 = b^2 : 2.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}4(a'^2 - b'^2) = OM^2 &= \frac{1}{2}(OA^2 + OA'^2) - \gamma^2\\ &= \frac{1}{2}(OA - OA')^2 + OA.OA' - \gamma^2\\ &= 2(\gamma^2 - b^2) + c^2 - \gamma^2\\ &= c^2 + \gamma^2 - 2b^2;\end{aligned}$$

donc

$$4a'^2 = c^2 + \gamma^2, \qquad 4b'^2 = 2b^2.$$

La distance perpendiculaire du foyer d'une hyperbole à l'asymptote est égale au demi-axe conjugué. La distance de A à MF est donc égale à b, où que soit M sur la conique S.

II.

Soit M un point commun à trois quadriques homofocales S, ayant leur centre en O. On sait qu'il existe trois quadriques Σ de centre M, homofocales entre elles, ayant pour plans principaux les plans tangents en M aux S, et tangentes en O aux plans principaux des S.

Alors, *toute focale des* Σ *est la section du cône asymptotique de l'une des quadriques* S *par le plan tangent en* M *à cette quadrique*. L'énoncé reste vrai si l'on permute S et Σ, O et M.

La démonstration est à peu près la même que pour le cas des coniques. Considérons en effet les trois quadriques Φ, passant par O, et ayant pour focale commune la section φ du cône asymptotique de la quadrique S par le plan tangent à S en M. Les quadriques Φ ont évidemment les mêmes plans principaux que les Σ. Pour les identifier avec les Σ, il suffit donc de montrer que leurs plans tangents en O sont les mêmes. Or, pour les Φ ces plans sont les plans principaux du cône Oφ, qui sont aussi les plans principaux de S, dont Oφ est le cône asymptotique. Les Φ sont donc identiques aux Σ.

Prenons une focale f des S et une focale φ des Σ, alors *la développable* (f, φ) *est circonscrite à une conique de révolution ayant* O *et* M *pour foyers*.

Soient $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ les équations tangentielles des points O et M. La conique φ est inscrite dans les deux cônes tangents à S, de sommets O et M, lesquels sont le cône asymptotique Oφ et le plan tangent en M. Son équation s'écrit donc

$$\varphi = S + k\alpha\beta = 0.$$

k étant une constante. D'autre part, f étant homofocale à S, son équation peut s'écrire

$$f = S + \lambda\Omega = 0,$$

Ω désignant le cercle à l'infini ; d'où l'identité

$$\varphi - f = k\alpha\beta - \lambda\Omega,$$

qui démontre la proposition.

Deux quadriques S' et Σ', homofocales à S et à Σ respectivement, seront représentées par $f + m\Omega$, $\varphi + n\Omega$. La développable (S', Σ') est donc circonscrite à la conique de révolution

$$k\alpha\beta - (\lambda + m - n)\Omega = 0,$$

ayant ses foyers également en O et M.

[O¹6j]

SUR LES SURFACES D'ÉGALE PENTE;

Par M. A. MYLLER.

On désigne sous le nom de *surface d'égale pente* la surface enveloppe d'une famille de cônes de révolution congruents ayant les axes parallèles à une direction fixe et dont les sommets décrivent une courbe directrice donnée.

Parmi ces surfaces, on a étudié spécialement celle qui a comme directrice une conique [1].

---

[1] De la Gournerie, *Traité de Géométrie descriptive*, t. II. — Cremona, *Nouv. Ann. de Math.*, 2ᵉ série, t. IV, 1865.

Dans ce qui suit, je m'occuperai de la surface qui a comme directrice une quartique gauche spéciale qui est intersection d'un cylindre et d'un cône de révolution ayant leurs axes parallèles à la direction des axes des cônes générateurs. Je démontrerai que la surface admet, en dehors de la génération donnée, encore deux autres tout à fait analogues.

Les sections de la surface par plans perpendiculaires aux axes des cônes générateurs sont des *courbes parallèles aux ovales de Descartes*. Je montrerai quelques propriétés de ces courbes.

En choisissant convenablement les axes des coordonnées, on peut écrire les équations de la quartique directrice sous la forme suivante :

$$(1) \qquad (\xi - k^2 c)^2 + \eta^2 - R^2 = 0,$$

$$(2) \qquad k^2[\xi + (1 - k^2)c]^2 + k^2\eta^2 - \zeta^2 = 0.$$

On peut supposer pour simplifier, mais sans restreindre la généralité du problème, que le cône générateur est incliné de 45° sur le plan xOy. Son équation sera alors

$$(3) \qquad (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - (z - \zeta)^2 = 0,$$

Les coordonnées ξ, η, ζ du sommet satisfont aux équations (1), (2) et le cône engendre par son mouvement la surface d'égale pente.

Cherchons d'abord la nature de la courbe qui est section de la surface par le plan xOy. En faisant dans (3) $z = 0$, on a le cercle générateur de la courbe. Son équation

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - \zeta^2 = 0$$

ensemble avec (1) et (2) montre que *son centre parcourt la circonférence* (1) *pendant que son rayon* ζ,

en vertu de l'équation (2), *varie proportionnellement à la distance du centre au point fixe ayant pour coordonnées* $-(1-k^2)c$ et o.

Si nous notons par φ l'angle que fait Ox avec le rayon du cercle (1) passant par le centre du cercle générateur, on a les coordonnées ξ, η du centre du cercle générateur, le rayon ζ du même cercle et l'équation de ce cercle donnés par les formules

$$\xi = k^2 c + R\cos\varphi,$$
$$\eta = R\sin\varphi,$$
$$\zeta = k\sqrt{[\xi + (1-k^2)c]^2 + \eta^2} = k\sqrt{R^2 + c^2 + 2cR\cos\varphi},$$

$$(4) \quad x^2 + y^2 - 2(k^2 c + R\cos\varphi)x - 2R\sin\varphi\, y + (1-k^2)(R^2 - k^2c^2) = 0.$$

Pour obtenir l'enveloppe on dérive (4) par rapport à φ et l'on obtient

$$(5) \quad x\sin\varphi - y\cos\varphi = 0,$$

relation qui représente la corde de contact du cercle (4) avec son enveloppe. En éliminant φ entre (4) et (5), on obtient l'équation de l'enveloppe qui est

$$(6) \quad [x^2 + y^2 - 2k^2cx + (1-k^2)(R^2 - k^2c^2)]^2 - 4R^2(x^2+y^2) = 0.$$

Ce sont *les ovales de Descartes*. Ce résultat a été établi par Genocchi [1]. Nous allons prouver encore que les ovales (6) peuvent être considérés encore de deux manières comme enveloppe d'un cercle dont le centre parcourt une circonférence et dont le rayon varie proportionnellement à la distance de son centre à un point fixe. Dans ce but, nous établirons d'abord un théorème préliminaire.

---

[1] *Annali di Matematica*, t. VI, 1864.

Étant donnée une famille de cercles (C) *orthogonaux à un cercle fixe* (B) *et dont les centres se trouvent sur un cercle fixe* (A), *il y a sur la ligne des centres* AB *des cercles* (A) *et* (B) *deux points* P *et* P′ *tels que les rayons des cercles* (C) *soient proportionnels aux distances de leurs centres à un quelconque de ces points.* Ces points sont conjugués harmoniques par rapport aux intersections du cercle (A) avec la droite AB.

En effet, soient

$$\xi^2 + \eta^2 - R^2 = 0$$

et

$$(\xi - a)^2 + \eta^2 - r^2 = 0$$

les équations des cercles (A) et (B) et

$$x^2 + y^2 - 2\xi x - 2\eta y + 2a\xi - a^2 + r^2 = 0$$

l'équation du cercle (C).

Cherchons à mettre le rayon

$$\rho = \sqrt{R^2 + a^2 - r^2 - 2a\xi}$$

du cercle (C) sous la forme

$$\rho = k\sqrt{(\xi - \lambda)^2 + \eta^2} = k\sqrt{R^2 + \lambda^2 - 2\lambda\xi}$$

qui exprime que ρ est proportionnel à la distance du point (ξ, η) au point $(\lambda, 0)$. Nous obtenons, en identifiant les deux expressions de ρ, deux valeurs pour λ et deux valeurs correspondantes pour k. Elles sont données par les équations

$$a\lambda^2 - (R^2 + a^2 - r^2)\lambda + aR^2 = 0,$$

$$k^2 = \frac{a}{\lambda}.$$

Revenons maintenant aux ovales (6) de Descartes.

Cette courbe étant une quartique bicirculaire jouit de la propriété de pouvoir être considérée de plusieurs manières comme enveloppe des cercles orthogonaux à un cercle et dont les centres parcourent une conique. En appliquant la théorie connue ([1]), que nous ne développons pas ici, au cas particulier de la courbe (6), on constate qu'il existe trois séries de cercles bitangents à la courbe.

Première série. — Cercles orthogonaux au cercle

$$x^2+y^2-(1-k^2)(R^2-k^2c^2)=0,$$

dont le centre parcourt le cercle

$$(x-k^2c)^2+y^2-R^2=0.$$

Deuxième série. — Cercles orthogonaux au cercle

$$[x+(1-k^2)c]^2+y^2-(1-k^2)(c^2+R^2)=0,$$

dont le centre parcourt le cercle

$$(x-k^2c)^2+y^2-k^2R^2=0.$$

Troisième série. — Cercles orthogonaux au cercle

$$\left[x+\frac{R^2-k^2c^2}{c}\right]^2+y^2-\frac{(R^2-k^2c^2)(R^2-c^2)}{c^2}=0,$$

dont le centre parcourt le cercle

$$(x-k^2c)^2+y^2-k^2c^2=0.$$

En s'appuyant sur notre théorème préliminaire on constate que :

Les cercles de la première série ont leurs rayons

([1]) *Voir* par exemple F. Gomes Teixeira, *Traité des courbes spéciales remarquables*, t. I, p. 239.

proportionnels aux distances de leurs centres au point

$$x = -(1-k^2)c, \qquad y = 0$$

ou au point

$$x = -\frac{R^2 - k^2c^2}{c}, \qquad y = 0,$$

les coefficients de proportionnalité, c'est-à-dire la quantité par laquelle il faut multiplier la distance pour avoir le rayon, étant respectivement

$$k \quad \text{et} \quad k\frac{c}{R}.$$

Les cercles de la deuxième série ont leurs rayons proportionnels aux distances au point

$$x = 0, \qquad y = 0$$

ou au point

$$x = -\frac{R^2 - k^2c^2}{c}, \qquad y = 0,$$

les coefficients de proportionnalité étant

$$\frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \frac{c}{R}.$$

Les cercles de la troisième série ont leurs rayons proportionnels aux distances au point

$$x = 0, \qquad y = 0$$

ou au point

$$x = -(1-k^2)c, \qquad y = 0,$$

les coefficients de proportionnalité étant

$$\frac{R}{kc} \quad \text{et} \quad \frac{R}{c}.$$

Notre théorème relatif à la triple génération des ovales par cercles est donc démontré.

Construisons maintenant sur chaque cercle de la

première série d'un côté et de l'autre du plan xOy deux cônes de révolution ayant ce cercle pour base et les génératrices inclinées de 45° sur xOy. On aura alors une première série de cônes générateurs de la surface d'égale pente. Ce sont les cônes (3) dont les sommets décrivent la courbe (1), (2). En faisant la même construction sur les cercles de la deuxième et de la troisième série, on obtient encore deux séries de cônes générateurs de la surface.

Les sommets des cônes de la deuxième série décrivent la quartique gauche

$$(\xi - k^2 c)^2 + \eta^2 - k^2 R^2 = 0,$$
$$\xi^2 + \eta^2 - k^2 \zeta^2 = 0,$$

et les sommets des cônes de la troisième série la quartique

$$(\xi - k^2 c)^2 + \eta^2 - k^2 c^2 = 0,$$
$$R^2 (\xi^2 + \eta^2) - k^2 c^2 \zeta^2 = 0.$$

Tous ces cônes sont tangents à la surface d'égale pente le long de deux génératrices dont les projections sur le plan xOy sont normales à la courbe (6). Nous avons ainsi obtenu *la triple génération de la surface d'égale pente par cônes congruents*.

Cherchons la nature de la courbe que nous désignons par S et qui est section de la surface par le plan $z = h$. Par un point M de cette section passe une génératrice de la surface qui coupe le plan xOy en un point P. Projetons orthogonalement la courbe S sur le plan xOy. Soit M′ la projection de M. La génératrice PM aura pour projection PM′ qui sera une normale aux ovales (6). La longueur PM′ sera égale à h. Par conséquent, le lieu du point M′ qui est la projection en vraie grandeur de la courbe S s'obtiendra en portant sur les normales

aux ovales (6) à partir de la courbe d'un côté et de l'autre une longueur égale à h. Les sections parallèles au plan xOy seront donc des courbes parallèles aux ovales de Descartes.

Considérons aussi un cône générateur de la surface d'égale pente. Il sera coupé par le plan $z=h$ suivant un cercle (b') qui sera un cercle générateur de la courbe S. A ce cercle correspond un cercle (C) générateur de la courbe (6) qu'on obtient en coupant le même cône par le plan $z=0$.

Si nous désignons par ρ et ρ' les rayons des cercles (C) et (C') on aura $\rho'=\rho\pm h$. Mais ρ étant proportionnel à la distance d du centre à un point fixe, on a $\rho=\lambda d$. En posant $h=\lambda h'$, on a $\rho'=\lambda(d\pm h')$. L'expression $d\pm h'$ représente la distance (maximale ou minimale) du centre du cercle (C') à un cercle fixe de rayon h'.

Par conséquent, *les courbes parallèles aux ovales de Descartes admettent une triple génération par cercles dont les centres décrivent un cercle fixe et dont les rayons sont proportionnels aux distances des centres à un autre cercle fixe.*

Le cas particulier quand ces courbes deviennent des courbes parallèles au *Limaçon de Pascal* a été étudié par M. O. Losehand [1] qui a indiqué une des séries de cercles générateurs.

---

[1] *Mathematische Annalen*, t. LXIV. *Voir*, dans le même Tome, un article de M. Gino Loria sur le même sujet.

[K′9aα]

SUR LE CENTRE DES MOYENNES DISTANCES D'UN GROUPE DE POINTS EN LIGNE DROITE ;

Par M. F. GONSETH.

1. Dans deux articles ([1]) parus ici même, j'ai montré que la méthode projective peut s'appliquer à l'étude des groupes de droites qui ont même *orientation*. La même méthode s'applique également à l'étude des groupes de points en ligne droite qui ont le même *centre des moyennes distances*. L'énoncé fondamental est le suivant :

Les groupes de points en ligne droite qui ont même centre des moyennes distances forment un système linéaire dont le point à l'infini, compté doublement, forme une paire neutre.

La démonstration est immédiate. Soient $x_1, \ldots, x_n$ les abscisses des points d'un groupe, comptées à partir du centre des moyennes distances. On aura toujours

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0.$$

Les x_i sont donc racines de l'équation

$$A_0 x^n + A_2 x^{n-2} + A_3 x^{n-3} + \ldots + A_n = 0,$$

dont le second coefficient est nul et les autres arbitraires. Le système de ces groupes est bien *linéaire*.

([1]) *Quelques propriétés métriques, etc.*, et *Sur l'orientation d'un groupe de droites.*

Pour tout groupe comprenant le point à l'infini, A_0 est nul. Comme A_1 manque également et que les autres coefficients peuvent être choisis arbitrairement, le point à l'infini, compté doublement, représente une paire *neutre*.

Le groupe fondamental (des n points où se réunissent tous les n points d'un groupe) *auquel tous les groupes du système sont apolaires*, se réduit au centre des moyennes distances, et au point à l'infini, compté $n - 1$ fois.

2. *a*. Les applications du principe sont immédiates. Toutes les courbes de $n^{\text{ième}}$ ordre qui ont mêmes asymptotes qu'une courbe C_n forment un système linéaire, le système linéaire de dimension minimale construit sur C_n et toutes les courbes de $n^{\text{ième}}$ ordre (dégénérées) comprenant la droite de l'infini comptée doublement. Les n asymptotes en sont une courbe particulière.

Les courbes de ce système coupent une droite arbitraire en des groupes de n points qui forment un système linéaire où le point de l'infini, double, est neutre (d'après un raisonnement qui intervient plusieurs fois dans les deux articles cités plus haut), et par conséquent :

Les n points d'intersection d'une courbe C_n par une droite arbitraire ont même centre des moyennes distances que les points d'intersection des n asymptotes de C_n.

Ce qui est un résultat très connu.

Parmi toutes les courbes de $n^{\text{ième}}$ ordre qui ont les mêmes asymptotes que C_n, il y en a une et par conséquent $\infty^{N(n-3)+1}$ qui coupent une droite arbitraire

en n points réunis au centre des moyennes distances des points d'intersection de C_n. Aucun autre point de la droite ne jouit de la même propriété.

b. Soient C_1 et C_2 deux courbes de $n^{\text{ième}}$ ordre et soit *d* une droite qui les coupe, ainsi que toutes les courbes de leur faisceau, en des groupes de points ayant même centre des moyennes distances. Celui de ces groupes qui contient le point à l'infini de la droite ne peut le contenir simplement, car son centre des moyennes distances, et par conséquent celui de tous les groupes, serait lui-même à l'infini, ce qui n'est possible que si les courbes C_1 et C_2 se coupent au point à l'infini de *d*. En général *d* sera donc une asymptote d'une courbe du faisceau.

L'enveloppe des droites coupant deux courbes de $n^{\text{ième}}$ *ordre* C_1 *et* C_2 *en des groupes admettant même centre des moyennes distances coïncide avec l'enveloppe des asymptotes des courbes du faisceau de* C_1 *et* C_2.

Cette enveloppe est de la classe $2n - 1$.

3. *a*. Nommons *homoasymptotiques* deux courbes, ou deux surfaces ayant mêmes tangentes en leurs points à l'infini. Dans l'espace, les surfaces homoasymptotiques à une surface donnée F_n forment un système linéaire, le système linéaire de dimension minimale comprenant F_n et toutes les surfaces de $n^{\text{ième}}$ ordre formées du plan double de l'infini, et d'une surface quelconque de $(n - 2)^{\text{ième}}$ ordre.

Il est facile de vérifier que les surfaces de ce système coupent un plan quelconque suivant un système linéaire de courbes, de dimension $N_2(n - 2) + 1$, qui contient naturellement toutes les courbes de $n^{\text{ième}}$ ordre

dégénérées en une courbe de $(n-2)^{\text{ième}}$ ordre et le plan double de l'infini. Par conséquent :

Deux surfaces homoasymptotiques sont coupées par un plan arbitraire suivant deux courbes homoasymptotiques.

Deux surfaces homoasymptotiques sont coupées par une droite arbitraire suivant deux groupes de points qui ont le même centre des moyennes distances.

b. Les droites qui touchent F_n à l'infini forment une congruence. On démontrera comme plus haut que :

Le complexe des droites qui coupent deux surfaces de $n^{\text{ième}}$ ordre suivant deux groupes ayant même centre des moyennes distances coïncide avec le complexe des droites asymptotiques à l'une ou l'autre des surfaces du faisceau des deux premières.

Ce complexe est du degré $(2n-1)$.

4. L'énoncé fondamental du n° 1 et celui qui joue le même rôle dans l'étude des groupes de droites ayant même orientation [1] sont deux cas spéciaux de l'énoncé projectif suivant (A, B seront deux points fixes, et P un point arbitrairement fixé) :

Les groupes de points $M_1, \ldots, M_n$, *d'une droite d, pour lesquels le produit des rapports anharmoniques*

$$(M_1 PAB)(M_2 PAB)\ldots(M_n PAB)$$

---

[1] *Voir* les articles cités.

est constant, forment un système linéaire de dimensions $n-1$ dans lequel la paire AB *est neutre.*

La valeur de la constante appartenant à chaque système semblable est une fonction de P. Son logarithme, en supposant que nous nous trouvions dans un espace non euclidien et que A et B soient les deux points à l'infini de d, est égal à la somme des distances non euclidiennes de P aux points M_i.

5. L'analogie des propriétés énoncées ci-dessus avec des propriétés bien connues [1] des courbes confocales est évidente; les unes sont en réalité les corrélatives des autres. La symétrie, incomplète dans le plan euclidien par le fait que la *conique absolue* doit y être considérée comme formée une fois de la droite double de l'infini et l'autre fois de la paire cyclique, devient parfaite dans le plan non euclidien où la conique absolue n'est pas dégénérée.

Ayant défini comme dans le plan euclidien l'*orientation* d'un groupe de droites par rapport à une droite donnée (avec la différence que dans le cas présent toutes les droites doivent passer par un même point), la notion corrélative sera la somme des distances d'un point P d'une droite à n points $M_1, \ldots, M_n$ de la même droite, somme que nous nommerons l'*éloignement* du groupe $M_1, \ldots, M_n$.

Nommons, enfin, comme il est naturel, *confocales* deux courbes de même classe qui ont les mêmes tangentes en commun avec la conique absolue Ω, et *foyer* l'intersection de deux pareilles tangentes, *homoasymptotiques* deux courbes de même ordre qui ont mêmes

(1) *Voir* les articles cités.

points d'intersection avec Ω, et *droite focale* la droite de jonction de deux points pareils. Il existe deux catégories d'énoncés parallèles, dont la démonstration est inutile, après ce qui précède :

Les groupes de tangentes menées d'un point arbitraire à deux courbes CONFOCALES *ont même orientation.* Une de ces courbes peut être formée de *n foyers* indépendants.

Le lieu des points, d'où les groupes de tangentes menées à deux courbes de classe n ont même orientation, coïncide avec le lieu des foyers des courbes du faisceau (*tangentiel*) *des deux premières.*

Les groupes de points d'intersection, par une droite, de deux courbes HOMOASYMPTOTIQUES *ont même éloignement.* Une de ces courbes peut être formée de *n droites focales* indépendantes.

L'enveloppe des droites qui coupent deux courbes de $n^{\text{ième}}$ *ordre en deux groupes de même éloignement coïncide avec l'enveloppe des droites focales des courbes du faisceau* (*ponctuel*) *des deux premières.*

Dans l'espace valent des énoncés semblables faciles à établir.

[D6a]

SUR LES FONCTIONS HOMOGÈNES;

PAR M. ADRIEN FAVRE.

On définit d'ordinaire les fonctions homogènes de la façon suivante : une fonction de plusieurs variables $f(x, y, z, \ldots)$ est dite *homogène* lorsqu'on a

$$(1) \qquad f(tx, ty, tz, \ldots) = t^{\alpha} f(x, y, z, \ldots),$$

α étant une constante.

On peut chercher à faire rentrer ces fonctions dans un type plus général et à étudier les fonctions jouissant de la propriété qu'exprime l'égalité suivante :

$$(2) \qquad f(tx, ty, tz, \ldots) = \varphi(t) f(x, y, z, \ldots).$$

Or il est aisé de voir que la relation (2) définit simplement les expressions homogènes, autrement dit que la fonction $\varphi(t)$, du moins si on la suppose continue, ne peut être qu'une puissance de t.

En effet, soit $f(x, y, z, \ldots)$ une fonction de plusieurs variables satisfaisant à la relation (2). Multiplions les variables indépendantes x, y, z, ... par $\lambda\mu$. Nous avons successivement :

$$\begin{aligned} f(\lambda\mu x, \lambda\mu y, \lambda\mu z, \ldots) &= \varphi(\lambda) f(\mu x, \mu y, \mu z, \ldots) \\ &= \varphi(\lambda)\varphi(\mu) f(x, y, z, \ldots). \end{aligned}$$

Mais nous avons, d'autre part, immédiatement

$$f(\lambda\mu x, \lambda\mu y, \lambda\mu z, \ldots) = \varphi(\lambda\mu) f(x, y, z, \ldots);$$

d'où

$$\varphi(\lambda\mu) = \varphi(\lambda)\varphi(\mu),$$

équation fonctionnelle à laquelle satisfait seule la fonction $\varphi(t) = t^{\alpha}$.

Ce résultat me semble avoir l'intérêt de préciser la notion d'homogénéité des formules de Mécanique et de Physique et d'expliquer d'une façon générale la forme bien connue des équations de dimensions. En effet, étant donnée la mesure d'une grandeur quelconque en fonction d'un système de trois unités fondamentales (longueur, masse et temps, pour fixer les idées), si l'on choisit des unités de longueur, masse et temps, λ, μ, τ fois plus petites sans rien changer aux conventions qui définissent les unités dérivées à partir des unités fondamentales, on conçoit sans peine que la

mesure de la grandeur considérée se trouve multipliée par un nombre fonction de λ, μ, τ. Mais il n'est nullement nécessaire, *a priori*, que cette fonction soit de la forme $\lambda^\alpha \mu^\beta \tau^\gamma$. Au contraire, cela résulte aisément de la proposition établie plus haut. Tout aussi facilement se justifie, à partir de là, la règle connue pour la recherche des équations de dimensions.

Nous nous bornons à cette indication, le développement de ces considérations dépassant le cadre d'une communication.

BIBLIOGRAPHIE.

MAURICE D'OCAGNE. — *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*, tome I. 1 volume in-8 (25-16) de XI-375 pages, avec 135 figures. Paris, Gauthier-Villars, 1917. Prix : 16 francs.

Jusqu'à une époque assez récente, le Cours de Géométrie de l'École Polytechnique, créé par Monge, fut avant tout un cours de Géométrie descriptive : on ne peut être étonné que la puissante influence du fondateur lui ait survécu près d'un siècle. La perspective et le tracé des ombres remplissaient le cours de première année. La seconde année était consacrée tout entière à la charpente et à la coupe des pierres.

Mannheim donna une forme très personnelle à ses leçons, par l'introduction de ses élégantes méthodes cinématiques, mais, lié qu'il était par le programme, il ne lui fut pas donné d'étendre la portée du cours. On pouvait être surpris, par exemple, que la théorie géné-

rale du mouvement infiniment petit eût pour couronnement le tracé des lignes d'ombre d'une surface de vis à filet triangulaire.

Dans ces dernières années, le programme a été profondément et heureusement modifié. Il a paru que la coupe des pierres et surtout la charpente constituaient des « doctrines » un peu démodées et ne méritaient plus la même place d'honneur qu'au temps de Monge; que d'autres sciences plus jeunes, le Calcul graphique, la Statique graphique, la Nomographie réclamaient une place dans l'enseignement de l'École Polytechnique; qu'il était judicieux d'introduire aussi dans le cours de Géométrie la théorie des mécanismes, application immédiate de la Géométrie.

On mesurera l'importance de cette évolution en comparant le *Cours de Géométrie descriptive* de Mannheim au *Cours de Géométrie pure et appliquée* de M. d'Ocagne.

Comme l'Auteur l'indique dans sa Préface, son enseignement a pour but, non seulement d'exposer un certain nombre de théories et de faits, mais encore de développer le sens géométrique des élèves. La méthode géométrique, assurément moins puissante que la méthode analytique, dans la majorité des cas, présente en revanche le précieux avantage de laisser, pour ainsi dire, l'esprit en contact ininterrompu avec la question étudiée. Alors que le traitement analytique consiste souvent dans l'application machinale de règles de calcul (il s'agit, bien entendu, de l'algèbre et de l'analyse des élèves, et non de celles des maîtres), le raisonnement géométrique oblige le chercheur à reconnaître l'*individualité* de chaque problème et demande à son esprit un effort d'adaptation tout à fait caractéristique. Or les problèmes qui se présentent à l'ingénieur ont

précisément ce trait d'être *individuels*, et chacun veut être attaqué d'une façon spéciale. On n'établit pas le projet d'un pont, d'une machine à vapeur ou d'un transport d'énergie, sans avoir à faire face à des difficultés particulières, non prévues par les théories générales. La culture géométrique développe la souplesse intellectuelle et paraît ainsi très propre à favoriser cet esprit d'invention, à défaut duquel les praticiens que forme l'École Polytechnique excelleront difficilement dans leurs spécialités.

Les matières du Cours sont diverses et mêmes disparates, à première vue : perspective, géométrie infinitésimale, géométrie cinématique, cinématique appliquée, stéréotomie (très réduite), statique graphique, nomographie. Mais on peut dire sans paradoxe que cette variété même de sujets fait l'unité du cours, en montrant quelles ressources offre la Géométrie pure dans l'étude des questions les plus dissemblables.

Le Tome I du Cours de M. d'Ocagne est consacré aux parties les plus théoriques de son enseignement : transformations géométriques, perspective, géométrie infinitésimale, géométrie réglée, géométrie cinématique. Voici l'analyse sommaire de ces divers chapitres :

Transformations géométriques. — On étudie les transformations homographiques, l'homologie, les transformations dualistiques, l'inversion. Cette dernière transformation fournit l'occasion d'introduire la notion de groupe.

Perspective. — On étudie la mise en perspective conique d'un corps donné par sa représentation géométrale, les constructions directes sur le tableau (signa-

lons entre autres d'élégantes constructions pour la perspective du cercle et pour celle de la sphère), la restitution perspective, à propos de laquelle sont exposés les principes de la métrophotographie, et enfin les perspectives cavalière et axonométrique.

Géométrie infinitésimale. — L'Auteur n'a pas hésité à donner une base analytique à cette partie de son enseignement, et il a sagement fait. Il ne faut pousser aucun culte, même celui de la Géométrie, jusqu'au fanatisme. On ne peut espérer asseoir solidement les notions de tangente, de plan tangent, de courbure, etc., sur le sentiment vague de la continuité géométrique. M. d'Ocagne admet donc les propriétés fondamentales des courbes et des surfaces, établies analytiquement en Mathématiques spéciales, et réserve l'application de la Géométrie pure à des questions plus nouvelles. En Géométrie plane, partant de formules simples et fécondes dues à Newton et à Mannheim, il donne des constructions de tangentes, de points caractéristiques, de centres de courbure. Pour les courbes gauches, il établit les formules de Frenet et fait une étude spéciale de l'hélice. Viennent ensuite les surfaces développables, puis les surfaces générales.

A ces dernières sont naturellement consacrés des développements plus étendus. L'Auteur donne des constructions élégantes du centre de courbure d'une section normale, de celui du contour apparent d'une surface. Il démontre les théorèmes de Sturm, de Malus et Dupin. Il établit les propriétés essentielles des lignes les plus importantes tracées sur une surface : lignes de courbure, asymptotiques, géodésiques (comme application, étude spéciale des géodésiques de l'ellipsoïde). Le Chapitre se termine par l'étude des surfaces

réglées gauches (applications à la recherche des surfaces de raccordement, utiles en descriptive; étude spéciale du cylindroïde).

Géométrie réglée. — On étudie les complexes et les congruences linéaires, en vue des applications à la Géométrie cinématique.

Géométrie cinématique. — On aborde les propriétés géométriques des mouvements dans le plan, autour d'un point fixe, dans l'espace, en séparant à chaque fois l'étude du déplacement fini et celle du mouvement continu. Pour les déplacements finis, dans l'espace, en particulier, l'Auteur emploie la méthode de Darboux, qui présente l'avantage de conduire immédiatement à la composition des déplacements hélicoïdaux.

Les notions de Géométrie réglée, précédemment développées, sont utilisées dans l'étude du complexe des normales, du complexe des tangentes et dans celle des mouvements à deux paramètres (théorèmes de Schönemann-Mannheim, de Ribaucour).

Comme application de la Géométrie cinématique, l'Auteur étudie les hélicoïdes réglés et la surface de l'onde.

Le Livre se termine par un Appendice, renfermant des notions complémentaires sur les transformations géométriques, y compris la représentation plane des surfaces du deuxième et du troisième ordres (avec étude pour ces dernières de la configuration formée par les 27 droites), d'intéressants développements de Géométrie infinitésimale plane empruntés aux travaux personnels de l'Auteur, etc.

Tel est cet Ouvrage, auquel la variété des sujets traités donne une figure originale dans la littérature

scientifique contemporaine. Il est rédigé avec ce souci de l'ordre, de la clarté et de l'élégance qui caractérise les publications de M. d'Ocagne. Il faut espérer qu'il contribuera à rétablir le goût de la Géométrie pure dans notre pays, où cette science paraît actuellement un peu délaissée.

R. Bricard.

CORRESPONDANCE.

R. Goormaghtigh. — *Au sujet de la question* 2249 (1917, p. 187). — En chaque point M d'une courbe donnée (M) on prend sur la tangente une longueur MT égale au rayon de courbure de la courbe en M; la question avait pour objet de déterminer le centre de courbure τ de la courbe (T) lieu de T au point T. Soient μ, μ_1, μ_2 les trois premiers centres de courbure de (M) en M et supposons que le sens de $\overline{MT}$ soit le sens positif de la tangente; la normale TK en T à (T) passe par le point K obtenu en portant sur $\overline{M\mu}$ un segment $\overline{\mu K}$ égal à $\mu\mu_1$. La construction suivante pour le centre de courbure τ est plus simple que celle donnée par M. Bouvaist (1917, p. 188).

Soit L *le point obtenu en portant sur* $\overline{\mu\mu_1}$ *un segment* $\overline{\mu_1 L}$ *égal à* $\mu_1\mu_2$; *le point* τ *est le milieu du segment compris entre* K *et le conjugué harmonique de* K *par rapport à* T *et la projection de* L *sur* TK.

R. Goormaghtigh. — *Sur la question* 2254 (1917,

p. 191). — La construction du centre de courbure en un point d'une conchoïde de Nicomède indiquée par M. d'Ocagne est contenue dans le théorème général suivant, qui permet de construire le centre de courbure en un point d'une conchoïde d'une courbe quelconque :

Soient M_1, M_2, ... *des points correspondants de diverses conchoïdes* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_2$ *d'une courbe* Γ, *par rapport au pôle* O, *et* μ_1, μ_2, ... *les centres de courbure correspondants; les normales en* M_1, M_2, ... *à* Γ_1, Γ_2, .. *concourent en un point* N. *Le rayon vecteur* OM_1M_2 ... *rencontre en des points* K_1, K_2, ... *les perpendiculaires élevées en* N *sur* NM_1, NM_2, ...; *les droites* $K_1\mu_1$, $K_2\mu_2$, ... *passent par un même point* I *situé sur la perpendiculaire élevée sur* ON *en son milieu.*

Si μ désigne le centre de courbure de Γ en M, le point N est à l'intersection de $M\mu$ avec la perpendiculaire en O sur OM; la perpendiculaire en N sur MN coupe OM en K, $K\mu$ rencontre la médiatrice de ON au point I; par une construction inverse on en déduit le centre de courbure μ_1 de Γ_1 en M_1.

Considérons encore, d'une manière plus générale, une courbe Ω; la tangente en un point O de Ω coupe une courbe Γ en M; sur OM portons des longueurs constantes MM_1, MM_2 ... ; on a alors le théorème suivant :

Il y a sur la normale à Ω *en* O *et sur celle de la développée de* Ω *au centre de courbure de* Ω *en* O *deux points* N *et* J *qui jouissent des propriétés suivantes : les normales en* M, M_1, M_2, ... *aux lieux* Γ, Γ_1, Γ_2, ... *de ces points concourent en* N; *les droites* JM, JM_1, JM_2, ... *rencontrent en* K, K_1, K_2, ... *les perpendiculaires élevées en* N *sur* NM, NM_1, NM_2, ...;

les droites qui joignent K, K_1, K_2, ... *aux centres de courbure* μ, μ_1, μ_2, ... *de* Γ, Γ_1, Γ_2, ... *en* M, M_1, M_2, ... *concourent au milieu* I *de* NJ.

Il est aisé de voir que si l'on connaît μ on peut construire J; connaissant J on en déduit par des constructions inverses les points μ_1, μ_2, ...

M. d'Ocagne. — *Sur la transformation des coniques en quartiques ou en cubiques unicursales.* — Le mode de transformation que M. F. Gomes Teixeira a récemment fait connaître à cet effet (*N. A.*, 1917, p. 281) est susceptible d'une simplification que je vais indiquer ici. Ce mode de transformation peut s'énoncer ainsi : « Ox et Oy étant deux axes rectangulaires quelconques, A un pôle fixe quelconque dans leur plan, les points correspondants M et M' sont tels que : 1° les vecteurs OM et AM' sont parallèles; 2° la droite MM' est parallèle à Oy. »

Si la parallèle à AO, menée par M', coupe OM en M_1, on voit que la courbe (M_1) se déduit de (M') par une simple translation équipollente à AO. Ces deux courbes sont donc identiques et la transformation qui lie M et M_1 fournit exactement les mêmes résultats que celle qui a lieu entre M et M'. Or, il est clair que la projection orthogonale de MM_1 sur Ox, qui se confond avec celle de $M'M_1$, est égale à celle de AO, donc constante, d'où la définition de cette transformation modifiée : *les points correspondants* M *et* M_1 *sont alignés sur* O, *et la projection orthogonale de* MM_1 *sur* Ox *est constante.*

Le point M est à l'infini : 1° si M_1 y est aussi; 2° si M_1 est sur Oy, en dehors de O, auquel cas M appartient à la parallèle à Oy menée par A.

Si (M_1) est une courbe d'ordre n, la courbe (M) a, d'après cela, n asymptotes parallèles à celles de (M_1), plus autant d'asymptotes que (M_1) a de points de rencontre avec Oy, en dehors de O. Il suit de là que si (M_1) est une conique quelconque, (M) a quatre asymptotes dont deux parallèles à celles de (M_1) et deux confondues avec la parallèle à Oy menée par A. C'est donc une quartique. Comme d'ailleurs il n'y a, sur chaque droite issue de O, en dehors de ce point, que deux points correspondant aux deux points où elle rencontre la conique (M_1), c'est que O est pour cette quartique (M_1) un point double.

Lorsque la conique (M_1) passe par O, une des asymptotes parallèles à Oy disparaît, ainsi qu'un des points sur chaque droite issue de O. On a une cubique unicursale ayant son point double en O.

Le mode de liaison entre les tangentes MT et M_1T aux courbes (M) et (M_1) résulte immédiatement de l'application d'un théorème que j'ai donné jadis (*N. A.*, 1886, p. 89). Il s'énonce comme suit : *Si la parallèle à* Oy, *menée par le point de rencontre* T *de ces tangentes, coupe la droite* OMM_1 *en* I, *on a, en grandeur et sens*, $M_1I = OM$.

QUESTIONS.

2329. Soient m et M deux points correspondants de deux courbes affines par rapport à un axe xx'; c et C les centres de courbure en ces points; A le point de rencontre (situé sur xx') des tangentes en m et M aux deux courbes. Les

perpendiculaires en A à Am et AM coupent mM en p et P. Démontrer que les droites pc et PC se coupent sur XX'.

F. Balitrand.

2330. Démontrer que l'enveloppe des droites sur lesquelles deux hyperboles équilatères déterminent deux segments ayant même milieu M est l'hypocycloïde à trois rebroussements tangente aux asymptotes des hyperboles; lieu de M.

J. Lemaire.

2331. Par un point O commun à deux cercles orthogonaux, on mène une droite variable qui coupe ces cercles en A et B : démontrer que le lieu du point conjugué harmonique de O par rapport à A et B est une strophoïde. J. Lemaire.

2332. Démontrer que la symétrique d'une tangente de rebroussement d'une hypoclycloïde à trois rebroussements, par rapport à une tangente variable de cette courbe, enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements.

J. Lemaire.

2333. Par les sommets d'un triangle, l'orthocentre et les pieds des hauteurs passent une infinité de cubiques circulaires : démontrer que le point commun à la courbe et à son asymptote réelle et le foyer singulier sont deux points diamétralement opposés sur le cercle des neuf points du triangle.

J. Lemaire.

2334. Toute cubique circulaire circonscrite à un triangle et contenant l'orthocentre et les pieds des hauteurs est anallagmatique de quatre manières, les coniques déférentes étant des paraboles : démontrer que l'axe de ces paraboles enveloppe l'hypocycloïde de Steiner du triangle, et trouver le lieu géométrique du point où il rencontre l'asymptote réelle de la cubique correspondante. J. Lemaire.

2335. Démontrer que si une sphère variable passe en quatre points fixes d'une biquadratique gauche qui sont situés dans un même plan, les quatre autres points communs à la sphère et à cette courbe sont dans un même *plan de direction* fixe. J. Lemaire.

2336. Soient α, β, γ, δ quatre tangentes d'une hypocycloïde à trois rebroussements, P le point commun aux deux premières, Q le point commun aux deux autres : démontrer que le foyer de la parabole tangente aux quatre droites est symétrique, par rapport au milieu de PQ, du point commun aux troisièmes tangentes à l'hypocycloïde issues de P et Q.

J. Lemaire.

2337. Si l'on joint le foyer d'une parabole aux six sommets d'un quadrilatère circonscrit, la parallèle menée par chaque sommet à la droite joignant au foyer le sommet opposé touche l'hypocycloïde à trois rebroussements inscrite au quadrilatère. J. Lemaire.

2338. Si un quadrilatère est circonscrit à une hypocycloïde à trois rebroussements, les troisièmes tangentes à cette courbe issues de chacun des couples de sommets opposés se coupent sur une même tangente qui est parallèle à l'axe de la parabole inscrite au quadrilatère. J. Lemaire.

2339. Si cinq droites α, β, γ, δ, ε touchent une hypocycloïde à trois rebroussements, les axes des cinq paraboles tangentes respectivement à quatre de ces droites forment un pentagone qui a ses angles égaux à ceux du pentagone formé par les cinq droites. J. Lemaire.

2340. Soient α, β, γ, δ quatre tangentes à une hypocycloïde à trois rebroussements (H), une conique (C) tangente à ces droites et touchant δ au même point que (H) : démontrer que cette conique touche la tangente menée, par le foyer F de la parabole tangente aux quatre droites, au cercle circonscrit au triangle que forment les trois premières.

J. Lemaire.

2341. Si quatre tangentes d'une hypocycloïde à trois rebroussements forment un quadrilatère inscriptible dans un cercle, la troisième diagonale touche la courbe en un point M : démontrer que le foyer F de la parabole tangente aux quatre droites est sur la troisième diagonale, et que cette diagonale et FM ont le même milieu. J. Lemaire.

2342. On considère les paraboles respectivement tangentes aux tangentes α, β, γ, δ et α, β, γ, δ' d'une hypocycloïde à trois rebroussements; démontrer que le cercle qui contient leurs foyers et le point de rencontre de leurs axes est égal au cercle circonscrit au triangle des trois tangentes α, β, γ.

J. Lemaire.

2343. Démontrer que le paramètre p de la parabole tangente à quatre droites α, β, γ, δ et le rayon r du cercle tritangent à l'hypocycloïde à trois rebroussements qui touche les mêmes droites sont liés par la relation

$$2pr^3 = R_\alpha . R_\beta . R_\gamma . R_\delta$$

aux rayons des cercles circonscrits aux triangles formés par les tangentes données, associées trois à trois.

J. Lemaire.

2344. Dans un triangle ABC, dont les hauteurs sont AA', BB', CC', le point de Lemoine est le point de Gergonne du triangle MNP des milieux des côtés du triangle A'B'C'.

V. Thébault.

2345. 1° Déterminer sur la base BC d'un triangle ABC un point B tel que les cercles inscrits aux triangles BAD et DAC soient égaux. Montrer que les cercles exinscrits dans les angles A sont aussi égaux;

2° Il existe deux groupes de cercles de rayons ρ_1 et ρ_2. Montrer que

$$\rho_1 + \rho_2 = h,$$

h étant la hauteur AA' du triangle ABC. V. Thébault.

2346. Trouver n nombres entiers positifs tels que la somme des produits 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, ..., n à n, de tous ces nombres soit un carré parfait quel que soit n. Quels sont les cinq plus petits nombres jouissant de la propriété?

P. Carissan.

2347. Former une suite K de nombres entiers tels que le reste de la racine carrée, à moins d'une unité, de chacun de

ces nombres soit un même entier donné quelconque k, qui soit aussi le reste de la racine carrée, à moins d'nne unité, du produit des n premiers termes de la suite K, si grand que soit n. Application; $k = 7$; écrire les quatre plus petits nombres jouissant de la propriété. P. Carissan.

2348. 1° u_n et v_n étant un couple quelconque de solutions en nombres entiers de l'équation $1 + 2u^2 = v^2$, ayant posé $s_n = u_n + v_n$, la relation $s_n = 3s_{n-1} \pm 2\sqrt[2]{2s_{n-1}^2 - 1}$ définit, par itération, une suite de nombres entiers, illimitée dans les deux sens, suivant qu'on adopte l'un ou l'autre signe devant le radical. Exprimer u_n et v_n en fonction de s_{n-1}. Écrire les six premières valeurs de u, v en partant de la solution initiale $(s_{n-1})_0 = 1$. Déduire de ces formules de nouvelles expressions générales des nombres triangulaires x, y, nombres liés eux-mêmes par $x(n+1) = 2y^2$.

2° La double relation d'itération $s_n = 5s_{n-1} \pm \sqrt[2]{6s_{n-1}^2 + 1}$ définit, dans des conditions analogues, une suite de nombres entiers avec $(s_{n-1})_0 = 2$; en déduire la solution générale de l'équation $2u^2 + 1 = 3v^2$. P. Carissan.

2349. On associe à une conique un cercle ayant son centre en l'un des foyers et passant par l'autre foyer. Faire voir sans calcul qu'il existe des hexagones inscrits au cercle et circonscrits à la conique, hexagones admettant comme axe de symétrie l'axe focal de la conique. G. Fontené.

ERRATUM.

Page 388, ligne 8, *au lieu de :* x_4, *lire :* x^4.

[A 5a]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA FRACTION RATIONNELLE DU SECOND DEGRÉ;

Par M. J.-B. POMEY.

L'un des problèmes les plus intéressants que l'on puisse se proposer au sujet de la fraction rationnelle du second degré, c'est de retrouver sur elle, par une voie qui sera alors tout à fait élémentaire, quelques-unes des propriétés des courbes du troisième degré dont on demande parfois la démonstration aux fonctions elliptiques. Parmi ces propriétés se trouve en première ligne celle qui relie trois points en ligne droite.

Soit donc la fonction

$$y = \frac{a\,x^2 + b\,x + c}{a'x^2 + b'x + c'};$$

coupons la courbe par la droite

$$y = mx + n;$$

l'équation aux abscisses des points d'intersection est

$$ma'x^3 + (mb' + na' - a)x^2 + (mc' + nb' - b)x + nc' - c = 0.$$

Appelons x_1, x_2, x_3 les racines et posons

$$s_1 = x_1 + x_2 + x_3,$$
$$s_2 = x_2 x_4 + x_3 x_1 + x_1 x_2,$$
$$s_3 = x_1 x_2 x_3.$$

Les relations entre les coefficients et les racines

donnent

$$m(b' + s_1 a') + na' - a = 0,$$
$$m(c' - s_2 a') + nb' - b = 0,$$
$$ms_3 a' + nc' - c = 0.$$

L'élimination de m et de n fournit la relation cherchée; posons, pour abréger,

$$A = bc' - cb', \qquad B = ca' - ac', \qquad C = ab' - ba';$$

elle s'écrit

$$A(b' + s_1 a') + B(c' - s_2 a') + Cs_3 a' = 0.$$

Si A, B, C sont nuls simultanément, la courbe se décompose, l'équation aux abscisses devient

$$(mx + n)(a'x^2 + b'x + c') = 0.$$

Le problème est indéterminé. Écartons ce cas.

Cherchons la forme que doit avoir la fraction y, pour que, si l'on pose

$$x_1 = \operatorname{tang}\varphi_1, \qquad x_2 = \operatorname{tang}\varphi_2, \qquad x_3 = \operatorname{tang}\varphi_3,$$

la relation obtenue se confonde avec la suivante :

$$\operatorname{tang}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) = h.$$

Celle-ci revient à

$$s_1 + hs_2 - s_3 - h = 0.$$

L'identification donne

$$\frac{Aa'}{1} = -\frac{Ba'}{h} = \frac{Ca'}{-1} = \frac{Ab' + Bc'}{-h}.$$

De ces équations on déduit d'abord

$$Ah + B = 0,$$
$$Ab' + B(c' - a') = 0,$$

d'où

$$h(c'-a')-b'=0.$$

D'autre part, les deux identités

$$Aa'+Bb'+Cc'=0,$$
$$Aa+Bb+Cc=0$$

donnent

$$a'-b'h-c'=0,$$
$$a-bh-c=0.$$

On aura donc, tout d'abord,

$$b'^2+(c'-a')^2=0,$$

d'où

$$b'=0, \qquad a'=c' \qquad \text{et ensuite} \qquad h=\frac{a-c}{b}.$$

Si donc y est de la forme

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a'(x^2+1)}$$

et qu'on pose $x=\operatorname{tang}\varphi$, les valeurs φ_1, φ_2, φ_3 de φ correspondant à trois points en ligne droite satisfont à la relation

$$\operatorname{tang}(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)=\frac{a-c}{b}.$$

C'est la relation fondamentale que nous nous proposions d'obtenir.

D'ailleurs, on a

$$ax^2+bx+c=\frac{a+c}{2}(1+x^2)$$
$$+\frac{c-a}{2}(1-x^2)+2\frac{b}{2}x,$$

de sorte que, comme on a

$$\frac{2x}{1+x^2}=\sin 2\varphi, \qquad \frac{1-x^2}{1+x^2}=\cos 2\varphi,$$

y sera de la forme

$$y = y_0 + y_1 \sin(2\varphi - \alpha),$$

en posant

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a-c}{b}, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \alpha + k\pi.$$

Or, pour ramener le dénominateur à la forme indiquée, comme alors on doit avoir $\delta' \equiv b'^2 - 4a'c' < 0$, il suffira de poser

$$2a'x + b' = \sqrt{-\delta'}\operatorname{tang}\varphi,$$

pour avoir

$$a'x^2 + b'x + c' = \frac{-\delta'}{4a'}(1 + \operatorname{tang}^2\varphi).$$

Le calcul de y_0, y_1 et α, en fonction des coefficients de la fraction rationnelle, peut s'effectuer simplement, en recherchant la signification de ces quantités ; on voit que, dans ce cas, il y a un maximum et un minimum réels, qui sont $y_0 + y_1$ et $y_0 - y_1$. Or ils sont donnés par l'équation

$$\delta' y^2 - 2Ty + \delta = 0,$$

où l'on a

$$\delta' = b'^2 - 4a'c', \qquad \delta = b^2 - 4ac, \qquad T = bb' - 2ac' - 2c'a.$$

Posons

$$\Delta = T^2 - \delta\delta' = 4(B^2 - AC).$$

Cette valeur de Δ devra être positive et l'on aura

$$\left.\begin{matrix} y_0 + y_1 \\ y_0 - y_1 \end{matrix}\right\} = \frac{T}{\delta'} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{\delta'},$$

d'où

$$y_0 = \frac{T}{\delta'}, \qquad y_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{\delta'}.$$

Les valeurs de φ correspondant au maximum et au

minimum sont

$$\varphi' = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}, \qquad \varphi'' = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4},$$

auxquelles correspondent les valeurs x' et x'' de x, savoir :

$$2a'x' + b' = \sqrt{-\delta'}\,\text{tang}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$2a'x'' + b' = \sqrt{-\delta'}\,\text{tang}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

d'où l'on tire aisément, par addition,

$$a'(x' + x'') + b' = \sqrt{-\delta'}\,\text{tang}\,\alpha.$$

Donc α est la valeur de φ qui correspond à l'abscisse qui est à égale distance des abscisses du maximum et du minimum. Or l'équation aux abscisses du maximum et du minimum est, comme on sait,

$$Cx^2 - 2Bx + A = 0,$$

d'où

$$x' + x'' = \frac{2B}{C}.$$

On aura donc

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{2a'B + b'C}{C\sqrt{-\delta'}},$$

et, moyennant cette valeur de α, on pourra écrire

$$x = -\frac{b'}{2a'} + \frac{\sqrt{-\delta'}}{2a'}\,\text{tang}\,\varphi,$$

$$y = \frac{T}{\delta'} + \frac{\sqrt{\Delta}}{\delta'}\sin(2\varphi - \alpha);$$

enfin, la condition pour que trois points de la courbe soient en ligne droite est

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \alpha + k\pi.$$

Pour que ces transformations soient réelles, il faut que l'on ait $\delta' < 0$.

Supposons maintenant qu'on ait $\delta' > 0$. Je chercherai, dans ce cas, à identifier l'équation aux abscisses de trois points en ligne droite avec l'équation

$$\operatorname{th}(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) = h,$$

en posant $x = \operatorname{th}\psi$.

J'aurai à identifier l'équation en s_1, s_2, s_3 avec l'équation

$$h = \frac{s_1 + s_3}{1 + s_2} \qquad \text{ou} \qquad s_1 - h s_2 + s_3 - h = 0,$$

ce qui donnera, par un calcul semblable au précédent,

$$h = -\frac{b'}{a' + c'} = -\frac{a' + c'}{b'} = -\frac{a + c}{b}.$$

Si l'on posait $b' = \pm(a' + c')$, on aurait $h = \mp 1$ et $\pm(a + c) = b$; reportant b et b' dans Δ, on aurait $\Delta = 0$, la courbe se décomposerait. Écartons ce cas.

On posera donc

$$b' = 0, \qquad a' + c' = 0,$$

d'où

$$h = -\frac{a + c}{b}.$$

On ramènera le dénominateur de la fraction y à la forme cherchée, en posant

$$2a'x + b' = \sqrt{\delta'}\operatorname{th}\psi,$$

et il viendra pour y une expression de la forme

$$y = y_0 + m \operatorname{sh} 2\psi - n \operatorname{ch} 2\psi.$$

Si l'on a $m^2 > n^2$, on posera

$$\operatorname{th}\alpha' = \frac{n}{m},$$

et il viendra

$$(1) \qquad y = y_0 + \sqrt{m^2 - n^2}\operatorname{sh}(2\psi - \alpha').$$

Si l'on a $m^2 < n^2$, on posera

$$\operatorname{th} \alpha'' = \frac{m}{n},$$

et il viendra

(2) $$y = y_0 - \sqrt{n^2 - m^2} \operatorname{ch}(2\psi - \alpha'').$$

La formule précédemment obtenue

$$y = \frac{T}{\delta'} + \frac{\sqrt{\Delta}}{\delta'} \sin(2\varphi - \alpha)$$

se transformera, si l'on pose

$$\varphi = \frac{\psi}{i}, \qquad \alpha' = \frac{\alpha}{i},$$

en la suivante :

$$y = \frac{T}{\delta'} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{\delta'} \operatorname{sh}(2\psi - \alpha');$$

c'est la formule (1), et l'on a

$$\frac{2a'B + b'C}{C\sqrt{\delta'}} = \operatorname{th} \alpha'.$$

La formule (2) sera donc

$$y = \frac{T}{\delta'} \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{\delta'} \operatorname{ch}(2\psi - \alpha'')$$

avec

$$\operatorname{th} \alpha'' = \frac{C\sqrt{\delta'}}{2a'B + b'C}.$$

Un cas limite serait celui où l'on aurait $m = n$, ou $\alpha' = \alpha''$, c'est-à-dire

$$C^2 \delta' = (2a'B + b'C)^2.$$

L'identité

$$C^2 \delta' - (2a'B + b'C)^2 \equiv -4a'^2(B^2 - AC) \equiv -4a'^2 \Delta$$

montre qu'on aurait $\Delta = 0$; la courbe alors se décomposerait.

Bien que nous ne voulions pas insister sur les nombreuses conséquences géométriques de la condition

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \alpha + k\pi,$$

pour trois points en ligne droite, ou de la condition analogue en ψ_1, ψ_2, ψ_3, nous ajouterons, à titre d'exemple, une simple remarque, relative aux points d'inflexion : suivant que δ' est négatif ou positif, j'ai exprimé y en fonction des arguments φ ou ψ. Comme la tangente trigonométrique a pour période π, les φ des trois points d'inflexion, dans le cas, de la courbe en φ, sont

$$\varphi' = \frac{\alpha}{3},$$

$$\varphi'' = \frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3},$$

$$\varphi''' = \frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3}.$$

Ils sont réels et les points d'inflexion aussi ; dans le cas de la courbe en ψ, comme la tangente hyperbolique a pour période πi, une seule de ces valeurs serait réelle ; donc la condition de réalité des trois points d'inflexion est $\delta' < 0$. D'autre part, la relation

$$\varphi' + \varphi'' + \varphi''' = \alpha + \pi$$

montre que, lorsque les trois points sont réels, ils sont en ligne droite. Analytiquement, d'ailleurs, il en serait de même si l'on considérait les points imaginaires de la courbe.

[$O^1 2a$]

DÉVELOPPANTES ET DÉVELOPPÉES ARÉOLAIRES ;

Par M. Ch. MICHEL.

1. Soient dans un plan orienté un point fixe O et une courbe C décrite par un point variable M. A étant un point choisi sur la courbe C, on sait définir en grandeur et en signe l'aire S comprise entre le rayon initial OA, le rayon final OM et l'arc AM de la courbe C. Sur la tangente en M à la courbe C il existe un point P et un seul tel que l'aire triangulaire comprise entre le rayon initial OP, le rayon final OM et le segment rectiligne PM soit égale, en grandeur et en signe, à S. Quand M varie sur la courbe C, le point P décrit dans le plan une courbe Γ que nous désignerons sous le nom de *développante aréolaire* de la courbe C, par rapport au point O.

Cette développante aréolaire dépend du choix du point A. Si l'on remplace A par un autre point fixe A′ de la courbe C, le point variable P est remplacé par un point P′ tel que l'aire comprise entre le rayon initial OP′, le rayon final OP et le segment rectiligne P′P soit constante et égale à l'aire comprise entre le rayon initial OA′, le rayon final OA et l'arc A′A de la courbe C. La courbe C a ainsi une infinité de développantes aréolaires par rapport au point O, dépendant d'un paramètre arbitraire.

2. Rapportons le plan à deux axes Ox et Oy. Soient x et y les coordonnées du point M, X et Y

celles du point P. On a les relations

$$(1) \qquad (Y - y)\,dx = (X - x)\,dy,$$

$$(2) \qquad \int_A^M x\,dy - y\,dx = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ X & Y & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = yX - xY,$$

qui permettent de calculer les coordonnées de P quand on connaît celles de M.

Différentions la seconde de ces relations. Il vient

$$x\,dy - y\,dx = X\,dy - Y\,dx + y\,dX - x\,dY,$$

c'est-à-dire, en tenant compte de la première,

$$y\,dX - x\,dY = 0.$$

On a ainsi le théorème suivant :

La tangente en P *à la courbe* Γ *est parallèle à la droite* OM.

La courbe Γ passe évidemment par le point A. Montrons que ce point est de rebroussement sur la courbe Γ. En effet, différentions la relation (1). Il vient

$$(Y - y)\,d^2x - (X - x)\,d^2y + dY\,dx - dX\,dy = 0.$$

Quand M et P sont en A, $X = x$, $Y = y$, et la relation précédente devient

$$dY\,dx - dX\,dy = 0.$$

Mais on a, d'autre part,

$$x\,dY - y\,dX = 0.$$

On a ainsi deux équations linéaires et homogènes en dX et dY ; le déterminant des coefficients de dY et de dX est égal à $x\,dy - y\,dx$ et il n'est nul que dans le cas exceptionnel, que nous écarterons, où la tangente

en A à la courbe C passe par le point O. Il en résulte que dX et dY sont simultanément nuls au point A ; le point A est donc bien de rebroussement sur la courbe C.

On a en général

$$y\,dX - x\,dY = 0;$$

d'où l'on tire, en différentiant,

$$dy\,dX - dx\,dY + y\,d^2X - x\,d^2Y = 0.$$

Quand M et P sont en A, dX et dY étant nuls, cette relation devient

$$y\,d^2X - x\,d^2Y = 0.$$

Elle exprime que la *tangente de rebroussement en* A *est la droite* OA.

3. Soient le point O et une courbe C décrite par le variable M. Au point M faisons correspondre un point P situé sur la tangente en M à la courbe C. Nous allons montrer que, *si la tangente en* P *à la courbe* Γ *décrite par ce point est constamment parallèle à la droite* OM, *la courbe* Γ *est une développante aréolaire de la courbe* C *par rapport à* O.

En effet, en reprenant les notations précédentes, on a

$$(Y - y)\,dx = (X - x)\,dy,$$

c'est-à-dire

$$x\,dy - y\,dx = X\,dy - Y\,dx,$$

puis

$$0 = y\,dX - x\,dY.$$

En ajoutant membre à membre, on obtient

$$x\,dy - y\,dx = X\,dy - Y\,dx + y\,dX - x\,dY,$$

d'où, en intégrant,

$$\int x\,dy - y\,dx = y\mathrm{X} - x\mathrm{Y} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \mathrm{X} & \mathrm{Y} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix},$$

ce qui démontre le théorème.

4. Soient le point O et une courbe Γ décrite par un point variable P. Proposons-nous de déterminer une courbe C décrite par un point variable M, telle que la courbe Γ en soit une développante aréolaire par rapport au point O. Nous dirons qu'une telle courbe C est une *développée aréolaire* de la courbe Γ par rapport au point O. Nous allons montrer qu'une courbe Γ admet une infinité de développées aréolaires par rapport au point O, dépendant d'un paramètre arbitraire.

Pour déterminer une courbe C, calculons l'abscisse x du point M en fonction des coordonnées du point P. Pour cela, éliminons y entre les relations (1) et (2). De la relation (2) on déduit, comme nous l'avons vu, la relation

$$y = x\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}.$$

En la différentiant par rapport à X, on obtient

$$\frac{dy}{d\mathrm{X}} = \frac{dx}{d\mathrm{X}}\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} + x\frac{d^2\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^2}.$$

Portons les valeurs obtenues de y et de dy dans la relation (1). Il vient ainsi

$$\frac{dx}{d\mathrm{X}}\left(\mathrm{Y} - x\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}\right) = (\mathrm{X} - x)\left(\frac{dx}{d\mathrm{X}}\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} + x\frac{d^2\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^2}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{dx}{d\mathrm{X}}\left(\mathrm{Y} - \mathrm{X}\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}\right) = x(\mathrm{X} - x)\frac{d^2\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}^2}.$$

On obtient ainsi une équation différentielle de Bernoulli, qui définit x comme fonction de la variable indépendante X. Cette équation est linéaire en $\frac{1}{x}$, et son intégrale générale est définie par une relation de la forme

$$\frac{1}{x} = \varphi(X) + \lambda\psi(X),$$

$\varphi(X)$ et $\psi(X)$ étant deux fonctions déterminées, λ étant un paramètre arbitraire. A chaque valeur de λ il correspond une développée aréolaire C de la courbe Γ par rapport à O.

Les points M des courbes C qui correspondent au même point P de la courbe Γ sont sur la parallèle menée par O à la tangente en P à la courbe Γ. Considérons trois développées aréolaires C_1, C_2, C_3 correspondant aux trois valeurs λ_1, λ_2, λ_3 du paramètre λ. Soient sur ces trois courbes les points M_1, M_2, M_3, en ligne droite avec le point O, qui correspondent au même point P de la courbe Γ. Considérons le rapport anharmonique $(OM_1M_2M_3)$ des quatre points O, M_1, M_2, M_3. Si x_1, x_2, x_3 sont les abscisses des points M_1, M_2, M_3, on a

$$(OM_1M_2M_3) = (o\,x_1x_2x_3) = (\infty\lambda_1\lambda_2\lambda_3) = \text{const.}$$

Ainsi, *quel que soit le point* P *de la courbe* Γ, *le rapport anharmonique formé par le point* O *et les points de trois développées aréolaires de la courbe* Γ *qui correspondent au point* P *est constant.*

D'après ce théorème, si l'on connaît deux développées aréolaires de la courbe Γ, toutes les autres peuvent être déterminées sans quadratures, par une construction géométrique simple.

5. Deux développantes aréolaires Γ et Γ′ d'une même

courbe C par rapport au point O sont telles que les tangentes en deux points correspondants P et P′ soient parallèles et que l'aire algébrique du triangle OP′P soit constante.

Soient le point O et une courbe Γ décrite par le point variable P. Proposons-nous de déterminer une courbe Γ′ décrite par le point variable P′ de façon que la tangente en P′ à Γ′ soit parallèle à la tangente en P à Γ et que l'aire algébrique du triangle OP′P soit constante.

Si X et Y sont les coordonnées de P, X′ et Y′ les coordonnées de P′, l'origine des coordonnées étant le point O, on doit avoir

$$\frac{dY'}{dX'} = \frac{dY}{dX},$$
$$X'Y - Y'X = k = \text{const.}$$

Éliminons Y′ entre ces deux relations. Dérivons la seconde par rapport à X. Il vient

$$Y\frac{dX'}{dX} + X'\frac{dY}{dX} - X\frac{dY'}{dX} - Y' = 0.$$

Portons dans cette nouvelle relation les valeurs de Y′ et de dY' tirées des deux premières. On obtient ainsi

$$\left(Y - X\frac{dY}{dX}\right)\frac{dX'}{dX} + \left(\frac{dY}{dX} - \frac{Y}{X}\right)X' + \frac{k}{X} = 0.$$

On a une équation différentielle linéaire, définissant X′ en fonction de la variable indépendante X. Cette équation a une intégrale générale de la forme

$$X' = f(X) + \mu\, g(X),$$

$f(X)$ et $g(X)$ étant des fonctions déterminées, μ étant un paramètre arbitraire. A chaque valeur de μ il correspond une courbe Γ′.

Nous allons établir le théorème suivant :

La droite PP′ *qui joint les points correspondants des courbes* Γ *et* Γ′ *touche son enveloppe en un point situé sur la parallèle menée par* O *aux tangentes en* P *et* P′ *aux courbes* Γ *et* Γ′.

Si ξ et η désignent les coordonnées d'un point courant sur la droite PP′, l'équation de cette droite est

$$\eta(X'-X)-\xi(Y'-Y)=X'Y-Y'X,$$

c'est-à-dire

$$\eta(X'-X)-\xi(Y'-Y)=k.$$

Le point de contact de cette droite avec son enveloppe est situé sur la droite qui a pour équation

$$\eta(dX'-dX)-\xi(dY'-dY)=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\eta}{\xi}=\frac{dY'-dY}{dX'-dX}.$$

Mais on a

$$\frac{dY'}{dX'}=\frac{dY}{dX}=\frac{dY'-dY}{dX'-dX}.$$

La droite considérée est donc la parallèle menée par O à la direction commune des tangentes en P et P′ aux courbes Γ et Γ′, ce qui démontre le théorème.

Il en résulte que l'enveloppe de la droite PP′ est une développée aréolaire C commune aux deux courbes Γ et Γ′. On voit ainsi que les diverses courbes Γ′ définies à partir de la courbe Γ correspondent aux diverses développées aréolaires C de la courbe Γ.

[A1b]

IDENTITÉS A DÉMONTRER;

Par M. G. FONTENÉ.

I. — Cas général.

1. Identité combinatoire. — *On a l'identité*

$$(1)\qquad C_m^0 . C_p^\alpha C_q^\beta \ldots - C_m^1 . C_{p-1}^\alpha C_{q-1}^\beta \ldots + \ldots + (-1)^h C_m^h . C_{p-h}^\alpha C_{q-h}^\beta \ldots + \ldots \equiv 0,$$

avec

$$(2)\qquad \begin{cases} p \gtreqless m, \quad q \gtreqless m, \quad \ldots, \\ \alpha + \beta + \ldots \leqq m - 1, \end{cases}$$

les valeurs de h étant limitées par les conditions

$$h \leqq p - \alpha,\ q - \beta,\ \ldots,$$
$$h \leqq m;$$

nous reviendrons sur le cas où l'on doit aller jusqu'à $h = m$; ce cas écarté, si α est le plus grand des nombres α, β, …, on aura $h \leqq p - \alpha$.

2. Transformation de cette identité. — Si l'on remplace C_p^α, C_{p-1}^α, … par $C_p^{p-\alpha}$, $C_{p-1}^{p-\alpha-1}$, …, et si l'on opère de même pour C_q^β, …, en posant

$$p - \alpha = a, \qquad q - \beta = b, \qquad \ldots,$$

on obtient

$$(3)\qquad C_m^0 . C_p^a C_q^b \ldots - C_m^1 . C_{p-1}^{a-1} C_{q-1}^{b-1} \ldots + \ldots + (-1)^h C_m^h . C_{p-h}^{a-h} C_{q-h}^{b-h} \ldots + \ldots \equiv 0,$$

avec

$$(4)\qquad \begin{cases} p \geqq m, \qquad q \geqq m, \qquad \ldots, \\ \alpha + \beta + \ldots \leqq m - 1, \end{cases}$$

les valeurs de h étant limitées par les conditions

$$h \leqq a, b, \ldots,$$
$$h \leqq m;$$

nous reviendrons sur le cas où l'on doit aller jusqu'à $h = m$; ce cas écarté, on aura par exemple $h \leqq a$.

3. Identité algébrique. — Reprenons l'identité (1). En examinant le cas où l'on a

$$m = p - \alpha, \; q - \beta, \; \ldots,$$

de sorte que les inégalités en h se réduisent à $h \leqq m$, on est mis sur la voie d'une identité algébrique, pour laquelle nous remplaçons p par x, q par y, ..., les quantités x, y, ... étant des variables qui peuvent prendre des valeurs quelconques.

Si l'on pose, x étant quelconque et α étant un entier positif ou nul,

$$\boxed{P_x^\alpha = x(x-1)\ldots(x-\alpha+1)},$$

le nombre des facteurs étant α, on a l'identité

$$(5)\qquad \begin{aligned} C_m^0 . P_x^\alpha P_y^\beta \ldots - C_m^1 . P_{x-1}^\alpha P_{y-1}^\beta \ldots + \ldots \\ + (-1)^m C_m^m . P_{x-m}^\alpha P_{y-m}^\beta \ldots \equiv 0, \end{aligned}$$

avec

$$(6)\qquad \alpha + \beta + \ldots \leqq m - 1;$$

on a par convention

$$P_x^0 = 1.$$

4. Solutions remarquables d'une certaine équation. — Reprenons l'identité (3), avec $m \leqq a, b, \ldots$, d'où $h \leqq m$. Le dernier terme du premier membre est

$$(-1)^m C_m^m . C_{p-m}^{a-m} C_{q-m}^{b-m} \ldots;$$

on peut alors supprimer au premier membre le facteur que l'on vient d'écrire, ce qui écarte les valeurs $p = m$, $m+1, \ldots, a-1$, $q = m, m+1, \ldots, b-1, \ldots$, et il reste

$$p \geqq a, \qquad q \geqq b, \qquad \ldots,$$
$$\alpha + \beta + \ldots \leqq m - 1.$$

On est mis ainsi sur la voie du résultat suivant, pour lequel je remplace p par x, ..., a par u, ...

L'équation

$$(7) \quad C_m^0 \frac{P_x^m}{P_u^m} \frac{P_y^m}{P_v^m} \ldots - C_m^1 \frac{P_{x-1}^{m-1}}{P_{u-1}^{m-1}} \frac{P_{y-1}^{m-1}}{P_{v-1}^{m-1}} \ldots + (-1)^m C_m^m = 0,$$

ou encore l'équation

$$(8) \quad C_m^0 P_x^m P_y^m \ldots - C_m^1 (P_u^1 P_{x-1}^{m-1})(P_v^1 P_{y-1}^{m-1}) \ldots$$
$$+ C_m^2 (P_u^2 P_{x-2}^{m-2})(P_v^2 P_{y-2}^{m-2}) \ldots + \ldots$$
$$+ (-1)^m C_m^m P_u^m P_v^m \ldots = 0,$$

admet les solutions

$$(9) \qquad x - u = \alpha, \qquad y - v = \beta, \qquad \ldots,$$

$\alpha, \beta, \ldots$ *étant des entiers positifs ou nuls qui vérifient la condition*

$$(10) \qquad \alpha + \beta + \ldots \leqq m - 1;$$

les couples d'inconnues (x, u), (y, v), ... étant en nombre n, ces solutions sont en nombre

$$\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots n}.$$

5. Autre forme de l'équation. — Pour obtenir une équation symétrique par rapport aux deux systèmes d'inconnues $x, y, \ldots$ et $u, v, \ldots$, considérons le terme général

$$(-1)^h C_m^h (P_u^h P_{x-h}^{m-h}) \ldots$$

et faisons un changement de variables portant sur $u, v, \ldots$ ou sur $x, y, \ldots$; nous adopterons de préférence cette seconde façon de faire. A cause de

$$P_x^\alpha = (-1)^\alpha P_{-(x-\alpha+1)}^\alpha,$$

on a

$$P_{x-h}^{m-h} = (-1)^{m-h} P_{-(x-m+1)}^{m-h} = (-1)^{m-h} P_X^k,$$

en posant

$$x - m + 1 = -X,$$
$$h + k = m;$$

le terme général ci-dessus devient

$$(-1)^m C_m^h (P_u^h P_X^k) \ldots;$$

l'équation (8) *se transforme en celle-ci* (avec $x, y, \ldots$ au lieu de X, Y, ...)

(11) $$C_m^0 P_x^m P_y^m \ldots + C_m^1 (P_u^1 P_x^{m-1}) \ldots + \ldots + C_m^h (P_u^h P_x^k) \ldots + \ldots + C_m^m P_u^m P_v^m \ldots = 0,$$

et cette équation admet les solutions

(12) $$x + u = (m-1) - \alpha, \quad y + v = (m-1) - \beta, \quad \ldots,$$

$\alpha, \beta, \ldots$ *étant des entiers positifs ou nuls qui vérifient les conditions*

(13) $$\alpha + \beta + \ldots \leq m - 1.$$

II. — Cas particulier.

6. Identité combinatoire. — Si, pour l'identité (1),

on considère un seul nombre p, on a

$$[1] \qquad C^0_m C^\alpha_p - C^1_m C^\alpha_{p-1} + \ldots + (-1)^h C^h_m C^\alpha_{p-h} + \ldots \equiv 0,$$

avec

$$[2] \qquad p \geqq m, \qquad \alpha \leqq m - 1,$$

les valeurs de h étant limitées par les conditions $h \leqq p - \alpha$, $h \leqq m$. Nous supposerons ici $p - \alpha \leqq m$, d'où $h \leqq p - \alpha$; le dernier terme est alors

$$(-1)^{p-\alpha} C^{p-\alpha}_m C^\alpha_\alpha.$$

7. Transformation de cette identité. — En posant $p - \alpha = a$, on a

$$[3] \qquad C^0_m C^a_p - C^1_m C^{a-1}_{p-1} + \ldots + (-1)^h C^h_m C^{a-h}_{p-h} + \ldots \equiv 0,$$

avec

$$[4] \qquad m \leqq p \leqq m + a - 1,$$

les valeurs de h étant limitées par les conditions $h \leqq a$, $h \leqq m$. Nous supposerons ici $a \leqq m$, d'où $h \leqq a$; le dernier terme est alors $(-1)^a C^a_m C^0_{p-a}$. On peut dire, *avec a entier :*

L'équation

$$[3'] \qquad C^0_m \frac{x(x-1)\ldots(x-a+1)}{a(a-1)\ldots 1} - C^1_m \frac{(x-1)\ldots(x-a+1)}{(a-1)\ldots 1} + \ldots + (-1)^{a-1} C^{a-1}_m \frac{x-a+1}{1} + (-1)^a C^a_m = 0,$$

qui est du degré a, admet comme racines les a nombres entiers

$$[4'] \qquad x = m,\ m+1,\ \ldots,\ m+(a-1).$$

8. Identité algébrique. — L'identité [1], quand on suppose $m \leqq p - \alpha$, d'où $h \leqq m$, conduit à l'identité algébrique suivante :

[5] $$C_m^0 P_x^\alpha - C_m^1 P_{x-1}^\alpha + \ldots + (-1)^m C_m^m P_{x-m}^\alpha \equiv 0$$

avec

[6] $$\alpha \leqq m - 1.$$

9. Résolution d'une équation remarquable. — L'identité [3], avec $m \leqq a$, d'où $h \leqq m$, conduit à ce résultat :

L'équation

[7] $$C_m^0 \frac{P_x^m}{P_u^m} - C_m^1 \frac{P_{x-1}^{m-1}}{P_{u-1}^{m-1}} + \ldots + (-1)^m C_m^m = 0,$$

ou encore l'équation

[8] $$C_m^0 P_x^m - C_m^1 (P_u^1 P_{x-1}^{m-1}) + C_m^2 (P_u^2 P_{x-2}^{m-2}) + \ldots + (-1)^m C_m^m P_u^m = 0,$$

qui est du degré m *en* x, *du degré* m *en* u, *est résolue par les formules*

[9] $$x - u = 0, 1, \ldots, \alpha, \ldots, m - 1;$$

le premier membre de cette équation est identique au produit

[10] $$(x - u)(x - u - 1) \ldots [x - u - (m - 1)];$$

cette identité a été rencontrée par M. Ono dans la démonstration d'une identité que j'avais obtenue indirectement (*Nouvelles Annales*, 1915, p. 578).

10. Autre forme de l'équation. — Si l'on remplace $x - m + 1$ par $-X$, on a ceci :

L'équation

[11] $$C_m^0 P_x^m + C_1^m (P_u^1 P_x^{m-1}) + \ldots + C_m^m P_u^m = 0,$$

qui est du degré m en x, du degré m en u, est résolue par les formules

[12] $$x + u = (m-1), m-2, \ldots, 0;$$

le premier membre de cette équation est identique au produit

[13] $$(x+u)(x+u-1)\ldots[x+u-(m-1)].$$

Si l'on fait par exemple $m = 4$, les équations [8] et [11] donnent lieu aux identités

$$\begin{aligned}(x(x-1)(x-2)(x-3) \\ &- 4u(x-1)(x-2)(x-3) + 6u(u-1)(x-2)(x-3) \\ &- 4u(u-1)(u-2)(x-3) + u(u-1)(u-2)(u-3) \\ &\equiv (x-u)(x-u-1)(x-u-2)(x-u-3)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}x(x-1)(x-2)(x-3) \\ &+ 4ux(x-1)(x-2) + 6u(u-1)x(x-1) \\ &+ 4u(u-1)(u-2)x + u(u-1)(u-2)(u-3) \\ &\equiv (x+u)(x+u-1)(x+u-2)(x+u-3),\end{aligned}$$

celle-ci étant symétrique par rapport aux deux variables x et u; on passe de la première identité à la seconde en posant

$$x + X = 3,$$

d'où

$$x - 3 = -X,$$

$$x-2 = -(X-1), \quad x-1 = -(X-2), \quad x = -(X-3).$$

[I19a]

REMARQUES SUR UN ARTICLE DE M. MATHIEU WEILL;

Par M. E. CAHEN.

Dans cet article, *Sur quelques équations quadratiques* (1916, p. 351), les formules obtenues ne donnent pas toutes les solutions. Prenons, par exemple, l'équation

$$x^2 + y^2 = 5z^2.$$

M. Weill trouve

$$x = u^2 - v^2 + 4uv,$$
$$y = 2uv - 2(u^2 - v^2),$$
$$z = u^2 + v^2.$$

Or il y a d'autres solutions. Voici comment on peut les obtenir toutes.

Écrivons l'équation sous la forme

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 5.$$

En posant

(1) $$\frac{\frac{y}{z} - 2}{\frac{x}{z} - 1} = \lambda,$$

on trouve

$$\frac{x}{z} = \frac{\lambda^2 - 4\lambda - 1}{\lambda^2 + 1}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{-2\lambda^2 - 2\lambda + 2}{\lambda^2 + 1};$$

(1) montre que si x, y, z sont entiers, λ est rationnel.

On peut donc poser

$$\lambda = -\frac{u}{v},$$

u et v étant des entiers premiers entre eux, et l'on a alors

$$\frac{x}{u^2+4uv-v^2} = \frac{y}{-2u^2+2uv+2v^2} = \frac{z}{u^2+v^2},$$

d'où

$$x = w\frac{u^2+4uv-v^2}{D},$$

$$y = w\frac{-2u^2+2uv+2v^2}{D}$$

$$z = w\frac{u^2+v^2}{D},$$

où D désigne le plus grand commun diviseur de

$$u^2+4uv-v^2, \quad -2u^2+2uv+2v^2, \quad u^2+v^2$$

et w un entier quelconque qui sera le plus grand commun diviseur de x, y, z. Si l'on se borne aux solutions *primitives*, c'est-à-dire dans lesquelles x, y, z sont premiers dans leur ensemble, il faut faire $w = \pm 1$.

Reste à voir ce qu'on peut dire de D. M. Weill suppose en somme que D est toujours égal à 1. Mais cela n'est pas et c'est pour cela qu'il ne trouve pas toutes les solutions.

D doit diviser les deux expressions

$$u^2+4uv-v^2 \;-2(-2u^2+2uv+2v^2)+5(u^2+v^2),$$
$$-(u^2+4uv-v^2)+2(-2u^2+2uv+2v^2)+5(u^2+v^2).$$

Or ces deux expressions se réduisent à $10u^2$ et $10v^2$. Mais u et v sont premiers entre eux. Donc D doit diviser 10, donc $D = 1$, 2, 5 ou 10.

Reste à savoir dans quel cas $D = 10$, dans quel cas $D = 2$, etc.

Une discussion facile montrera que

$D = 1$ si u et v sont de parités différentes et $u \not\equiv -2v \pmod 5$,
$D = 2$ si u et v sont impairs et $u \not\equiv -2v \pmod 5$,
$D = 5$ si u et v sont de parités différentes et $u \equiv -2v \pmod 5$,
$D = 10$ si u et v sont impairs et $u \equiv -2v \pmod 5$.

En faisant $u = -2$, $v = 1$, $w = -1$, par exemple, c'est le troisième cas, et l'on trouve

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = -1,$$

solution qui n'est pas donnée par les formules de M. Weill.

La méthode peut se généraliser et s'applique à toute équation homogène algébrique unicursale

$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 0\right) = 0$$

lorsque $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ s'expriment par des fonctions rationnelles à coefficients rationnels d'un paramètre, lequel s'exprime lui-même par une fonction rationnelle à coefficients rationnels de x, y, z. On peut même supposer qu'il y a plus de trois variables ou plus d'une équation.

M. Weill dit qu'il n'existe aucune méthode pour trouver une solution de l'équation $ax^2 + by^2 = z^2$. Or cette question se trouve déjà résolue dans Lagrange (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1767). *Voir* aussi, pour l'équation plus générale $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, Gauss (*Disquisitiones*, n° 294), où se trouve traité un exemple numérique.

ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES.

1915 (**1901**, 335). — Étudier les polynomes à deux variables

$$P_{2m,2n} = \frac{\partial^{m+n}[x^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n}]}{\partial x^m \partial y_n}.$$

On pourra en particulier étudier la position de la courbe

$$P_{2m,2n} = 0$$

par rapport au cercle

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Par exemple le polynome $P_{2,0}$ est

$$\frac{\partial[x(1-x^2-y^2)]}{\partial x} = 1 - 3x^3 - y^2$$

et la courbe $P_{2,0} = 0$ est tout entière dans le cercle. Ce fait est général. APPELL.

1937 (**1902**, 479). — Étant donné un parallélogramme articulé ABCD, on fixe sur les côtés AB, BC, CD, en des points m, n, p, des tiges $\mathrm{M}m$, $\mathrm{N}n$, $\mathrm{P}p$, perpendiculaires respectivement à ces côtés, et déterminées par les relations

$$\frac{p\mathrm{P}}{\mathrm{C}p} = \frac{\mathrm{C}n}{\mathrm{N}n} : \frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{B}m} = \frac{\mathrm{B}n}{\mathrm{N}n}.$$

On a d'ailleurs

$$\mathrm{B}m = \mathrm{C}p.$$

Démontrer que le triangle MNP reste semblable à lui-même dans toutes les déformations du parallélogramme, qui peut ainsi servir de pantographe. J. RÉVEILLE.

1944 (**1902**, 480). — La recherche d'une courbe telle que le lieu du centre d'une conque qui a avec cette courbe un

contact du quatrième ordre soit une parabole donnée se ramène à la résolution de l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2.$$

X. Stouff.

1956 (**1903**, 47). — On donne dans l'espace quatre droites concourantes Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, et quatre génératrices D_1, D_2, D_3, D_4 d'un même système d'une quadrique Q. Trouver le lieu d'un point M tel que les quatre plans MD_1, MD_2, MD_3, MD_4 rencontrent Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 respectivement en quatre points situés dans un même plan P, et l'enveloppe de ce plan.

R. Gilbert.

1957 (**1903**, 47). — Une parabole est bitangente à une conique donnée S en un point fixe et en un autre point. Le lieu du foyer est une podaire de parabole.

Cas particuliers : La conique donnée S est une hyperbole équilatère; 2° la conique S se décompose en un couple de points.

R. Gilbert.

1988 (**1904**, 48). — On donne une quadrique et trois droites α, β, γ. Si D est un point de la quadrique, le trièdre de sommet D dont les plans des faces passent par α, β, γ appartient à un tétraèdre DABC inscrit à la quadrique. De quelle classe est l'enveloppe du plan ABC?

Application au problème :

Inscrire à une quadrique un tétraèdre dont les plans des faces passent par quatre droites données.

G. Fontené.

2003 (**1904**, 528). — On sait que les permutations différentes de m lettres dans lesquelles il y en a p égales à a, q à b, r à c, ..., t à l, sont au nombre de

$$\frac{m!}{p!\,q!\,r!\dots t!}.$$

S'il s'agit de combinaisons n à n de m lettres distinctes, leur nombre est donné par la formule

$$\frac{m(m-1)\dots(m+n+1)}{n!}.$$

Que devient ce nombre lorsqu'on a aussi p lettres égales à a, q à b, ..., t à l? AUDIBERT.

2010 (**1905**, 96). — Si les trièdres abc, $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$ ont un centre O d'homologie, les neuf points de rencontre des droites du Tableau

$$(\text{Centre O})\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

avec leurs *associées mineures* sont en ligne droite. [L'associée de a est la droite (b_1c_2, b_2c_1)]. P. SONDAT.

2038 (**1906**, 143). — On mène les hauteurs AD, BE, CF du triangle ABC. Soit $D_1E_1F_1$ l'axe d'homologie des triangles ABC et DEF. Par E_1, F_1, D_1 on mène les parallèles à AB, BC, CD qui coupent BC, CA, AB aux points I, H, K en ligne droite, et les parallèles à BC, CA, AB qui coupent AB, BC, CA aux points K_1, I_1, H_1, aussi en ligne droite. Soient Q et Q_1 les coniques circonscrites à ABC et tangentes, la première à AI, BH, CK, et la seconde à AI_1, BH_1, CK_1.

I. Si par un point O de Q on mène les perpendiculaires à BC, CA, AB, elles coupent CA, AB, BC en μ, ν, λ et l'on a la droite $\Delta(\lambda\mu\nu)$. Ces mêmes perpendiculaires menées par un point O_1 de Q_1 coupent AB, BC, CA aux points ν_1, λ_1, μ_1 et l'on a la droite $\Delta(\lambda_1\mu_1\nu_1)$.

II. Les coniques Q, Q_1 et le cercle ABC ont un quatrième point commun ω auquel correspondent deux droites Δ, Δ_1 et la droite Δ_2 de Simson.

III. Si ABC est un triangle équilatéral, les coniques Q, Q_1 se superposent au cercle ABC, et à tout point O de ce cercle correspondent trois droites Δ, Δ_1, Δ_2. P. SONDAT.

2039 (**1906**, 144). — Démontrer la relation

$$(1)\quad \sum \frac{f'''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2 f''(\alpha)} + \sum \frac{f''(\beta)}{[f''(\beta)]^2 f(\beta)} + \sum \frac{1}{f(\gamma) f'(\gamma)} = 0,$$

la première somme s'étendant à toutes les racines, supposées

distinctes, de l'équation algébrique

$$f(x) = 0;$$

la deuxième somme s'étendant à toutes les racines, supposées distinctes, de l'équation

$$f'(x) = 0,$$

et la troisième somme s'étendant à toutes les racines, supposées distinctes, de l'équation

$$f''(x) = 0.$$

Étendre la relation (1), en faisant intervenir les dérivées quatrième, cinquième, etc., du polynome $f(x)$.

NICOLAS KRYLOFF.

2045 (**1906**, 432). — Soient (A, A'), (B, B'), (C, C') trois couples de semi-droites d'un même plan, les semi-droites d'un même couple étant parallèles et de même sens. Les cycles inscrits dans les quatre triangles (A, B, C), (A, B', C'), (A', B, C'), (A', B', C) sont tangents à un même cercle. Il en est de même des cycles inscrits dans les triangles (A', B, C), (A, B', C), (A, B, C'), A', B', C').

Le théorème est encore vrai si les semi-droites d'un même couple sont parallèles et de sens contraire. On obtient comme cas particulier de cette dernière proposition le théorème de Feuerbach et le théorème suivant :

Soient ABC *un triangle*, A', B', C' *les milieux de ses côtés. Les cercles inscrits dans les quatre triangles* A'B'C', AB'C', A'BC', A'B'C *sont tangents à un même cercle.*

La première proposition donne des théorèmes où interviennent des cercles exinscrits.

R. BRICARD.

2057 (**1906**, 575). — Si, dans le triangle arithmétique, on multiplie les nombres figurés successifs d'ordre p à partir du premier, par les coefficients successifs du développement de $(x+a)^n$ à partir de C_n^q, et si l'on ajoute les $n-q+1$ produits affectés alternativement du signe + et du signe —, la somme obtenue est nulle pour $q \leqq p$; et pour $q = p+1$,

$p+2$, ..., n, ce qui suppose $n > p$, on obtient les coefficients du développement de $(x+a)^{n-p-1}$.

G. FONTENÉ.

2064 (**1907**, 95) ([1]). — Un point C se meut sur un cercle de rayon égal à l'unité. Un autre point, situé originairement au centre O du cercle, se meut avec la même vitesse que le point C sur une courbe dont la tangente passe constamment par ce point.

Démontrer que le rayon de courbure en un point quelconque M de cette courbe est égal au segment intercepté par le rayon OC sur la normale en M.

2065 (**1907**, 95). — On considère le rayon de courbure ρ de la courbe dont il s'agit dans la question précédente comme fonction de la distance p de l'origine à la tangente à cette courbe. Former l'équation différentielle qui relie ρ à p.

Dr W. KAPTEYN.

2096 (**1908**, 336). — On considère une épi-(hypo) cycloïde ayant R pour rayon du cercle fixe O (*de base*) et R′ pour rayon du cercle mobile C, et telle que $R' = \frac{R}{m}$, m étant un nombre entier. L'aire de la podaire de la courbe par rapport à un point quelconque de la circonférence d'un cercle concentrique au cercle O et de rayon ρ est constante et a pour expression

$$U = \frac{\pi(R \pm 2R')}{4R'}[(R \pm 2R')^2 + \rho^2],$$

le signe + s'appliquant à une épicycloïde et le signe — à une hypocycloïde.

E.-N. BARISIEN.

2114 (**1908**, 576). — Dans un tétraèdre orthocentrique SABC, on désigne par a, b, c, a', b', c' les cosinus des dièdres suivants BC, CA, AB, SA, SB, SC; on connaît la relation

$$aa' = bb' = cc' = M;$$

([1]) Énoncé reproduit pour rendre compréhensible la question 2065, non résolue. Pour la solution de la question 2064, *voir* **1907**, p. 173 et 474.

démontrer la formule

$$\frac{1}{M^2+a'b'c'} = \frac{1}{a'(a'+b'c')} + \frac{1}{b'(b'+c'a')} + \frac{1}{c'(c'+a'b')}.$$

Si l'on donne a, b, c, on a une équation du troisième degré en M, ayant ses racines réelles ; le problème est possible sous la condition $abc > 0$, et il a alors trois solutions (on peut avoir $b = 0$, $c = 0$; il y a alors indétermination).

G. Fontené.

2116 (**1909**, 56). — Soient A_1, A_2, ... des points fixes dans l'espace, et $O\Delta_1$, $O\Delta_2$, ... un système de demi-droites qu'on déplace de toutes les manières possibles autour du point O sans le déformer. Aux points A_1, A_2, ..., on applique des vecteurs V_1, V_2, ... *de grandeurs déterminées*, parallèlement aux demi-droites $O\Delta_1$, $O\Delta_2$, ... Déterminer l'ordre du complexe formé par les axes centraux des systèmes de vecteurs ainsi obtenus [1].

Si l'on impose la condition que les vecteurs aient une résultante, le complexe est remplacé par la congruence des droites qui portent les résultantes ; déterminer l'ordre et la classe de cette congruence.

Même question, si l'on impose la condition que le système des vecteurs ait un moment donné par rapport à un axe parallèle à la résultante générale. G. Fontené.

2141 (**1909**, 527). — Soit l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{(axy+bz)+(fx+gy)}{(bpq+aw)+(gp+fq)} = \frac{1}{m} \qquad (px+qy = z+w);$$

la transformation de Legendre donne une équation du même type ; les analogues des coefficients a, b, f, g, m étaient b, a, g, f, $\frac{1}{m}$.

(1) M. d'Ocagne a montré que *dans le plan*, la résultante des vecteurs V passe par un point fixe. Il en est de même dans l'espace pour des vecteurs parallèles.

Les équations des *caractéristiques* sont

$$\frac{z}{m} = (x-\alpha)(y-\beta) - \frac{a\alpha\beta + f\alpha + g\beta}{mb+a},$$

$$\frac{x-\alpha+\dfrac{a\alpha+g}{mb+a}}{\gamma} = \frac{y-\beta+\dfrac{a\beta+f}{mb+a}}{\delta} \; (=t);$$

ce sont des paraboles ayant leurs axes parallèles à Oz.

Les *développables caractéristiques* ont de même pour équations tangentielles, en mettant m pour $\frac{1}{m}$,

$$\frac{w}{m'} = (p-\alpha')(q-\beta') - \frac{b\alpha'\beta' + g\alpha' + f\beta'}{m'a+b},$$

$$\frac{p-\alpha'+\dfrac{b\alpha'+f}{m'a+b}}{\gamma'} = \frac{q-\beta'+\dfrac{b\alpha'+g}{m'a+b}}{\delta'} \; (=t');$$

ce sont des cylindres paraboliques.

En supposant a et b non nuls, chaque caractéristique $\left(\alpha, \beta, \frac{\gamma}{\delta}\right)$ correspond à une développable $\left(\alpha', \beta', \frac{\gamma'}{\delta'}\right)$; chaque élément ponctuel $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, t')$ correspond à un élément tangentiel $(\alpha', \beta', \gamma', \delta', t')$ d'après les relations

$$\frac{\gamma'}{\delta} = \frac{\delta'}{\gamma}, \qquad \frac{\alpha'}{\beta} = \frac{\beta'}{\alpha} = -m, \qquad \frac{t'}{mt} = \frac{\delta}{\gamma'} = \frac{\gamma}{\delta'}.$$

Si a est nul, l'équation aux dérivées partielles donnée par la transformation de Legendre est linéaire; les cylindres paraboliques dépendent seulement de deux paramètres, leurs équations tangentielles étant

$$\frac{p+\dfrac{f}{b}}{\gamma'} = \frac{q+\dfrac{g}{b}}{\delta'} = \frac{pq-mw}{\lambda'} \; (=t'),$$

et la correspondance entre les paraboles et les cylindres se traduit par les *deux* relations

$$\frac{\gamma'}{\delta} = \frac{\delta'}{\gamma}, \qquad m(\alpha\gamma + \beta\delta') + \lambda' = 0.$$

G. Fontené.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XVII, 4e SÉRIE, 1917.)

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.*

Analyse mathématique.

Géométrie.

Mathématiques appliquées.

Questions de concours et d'examens.

Correspondance.

Nécrologie.

Bibliographie.

Anciennes questions non résolues.

Questions proposées.

Solutions de questions proposées.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS.

(TOME XVII, 4e SÉRIE, 1917.)

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
57596 Quai des Grands-Augustins, 55.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Ancien Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME XVII.
(76e VOLUME DE LA COLLECTION.)

DÉCEMBRE 1917.

S'adresser, pour la rédaction :
à M. C.-A. LAISANT, 5, rue du Conseil, Asnières (Seine),
ou à M. R. BRICARD, 108, rue Denfert-Rochereau, Paris, 14e

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1917

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Rédacteur de service : M. C.-A. LAISANT.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences.

Alger : M. S. CARRUS. — Besançon : M. H. PADÉ. — Bordeaux : M. ÉT. DELASSUS. — Caen : M. CH. RIQUIER. — Clermont-Ferrand : M. J. HAAG. — Dijon : M. R. BAIRE. — Grenoble : M. J. COLLET. — Lille : M. A. BOULANGER. — Lyon : M. R. LE VAVASSEUR. — Marseille : M. L. SAUVAGE. — Montpellier : M. E. FABRY. — Nancy : M. H. VOGT. — Paris : M. H. LEBESGUE. — Poitiers : M. P. BOUTROUX. — Rennes : M. J. LE ROUX. — Toulouse : M. E. COSSERAT.

Prix d'abonnement pour un an (12 *numéros*)

Paris.................. 15 fr. | Départements et Union postale.. 17 fr.

AVIS DIVERS

Le nombre des *Anciennes questions* (1842-1910, nos 1 à 2166) restées sans solutions à la fin de l'année 1917 se réduit à 126. Nous devons remercier nos collaborateurs du précieux concours qu'ils nous ont apporté, en exprimant l'espoir que ce reliquat diminuera encore, grâce à la réimpression des énoncés.

La réduction du nombre des pages de chaque numéro, imposée par les circonstances actuelles, nous empêche de publier les articles trop étendus. D'une façon générale, nous exhortons donc nos correspondants à la concision, et nous nous excusons d'avance des retards, bien involontaires, qui pourront se produire dans la publication de leurs communications.

AVIS IMPORTANT.

Tout Auteur d'un Mémoire inséré aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* a droit à un tirage à part gratuit de 25 exemplaires.

Cette mesure n'est pas applicable aux *Articles bibliographiques*, à ceux qui figurent sous la rubrique *Correspondance*, aux *Énoncés* ni aux *Solutions de questions proposées*.

Quand le dernier chiffre inscrit est un 5, on a indiqué par un chiffre spécial (5*) le 5 *fort*, c'est-à-dire obtenu en forçant un 4 dans le cas où le premier chiffre négligé est égal ou supérieur à 5.

Interpolation. — L'interpolation appliquée aux trois dernières colonnes de la Table I permet de calculer, à une unité du dernier ordre près, le nombre qui correspond à un nombre non inscrit. Ainsi le carré de 2826 s'obtiendra ainsi : Les carrés de 282 et 283 ont une différence tabulaire de 57; on écrira

$$\begin{array}{r} 2\,8\,2 \\ 6 \\ \hline 2\,8\,2\,6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\,9\,5\,2 \\ 3\,4\,2 \\ \hline 7\,9\,8\,6 \end{array} \qquad \Delta = 57$$

Le résultat est 7986×10^3 (en tenant compte du multiplicateur 10 placé en tête de la colonne). L'approximation est de $\frac{1}{8000}$ (erreur relative).

Usage des Tables. — La *multiplication* se fait au moyen des neuf premières colonnes.

La *division* se fait en multipliant par l'inverse du diviseur; on trouve cet inverse dans la colonne $\frac{1}{n}$.

L'*élévation au carré* et l'*extraction des racines carrées* se font au moyen de la colonne n^2.

Les *racines* ou *puissances quelconques*, les *exponentielles* se calculent au moyen de la colonne $\log n$.

La *virgule* se place de tête ou en appliquant les règles usuelles.

Les *chiffres à conserver* dépendent de l'approximation à obtenir, qui dépend elle-même de l'approximation des données.

58219 Paris. — Imp. Gauthier-Villars et Cie, 55, quai des Grands-Augustins.

SOMMAIRE DU NUMÉRO DE DÉCEMBRE 1917.

Voir **AVIS DIVERS**, page 2 de la Couverture.

57596 Paris. — Imp. Gauthier-Villars et Cie, 55, quai des Grands-Augustins.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

